

1. Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement la partie A . Dire si A est ouverte, fermée, bornée. Décrire son intérieur, son adhérence et sa frontière.

Parties de $\mathbf{R}^2$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 0\}; \quad A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y < x^2\}; \quad A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x-2| \geq 1\};$$

Parties de $\mathbf{R}^3$.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > 2\}; \quad A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ et } z < 0\}.$$

2. Donner et représenter si possible le domaine de définition des fonctions suivantes; dire s'il est ouvert, fermé, borné :

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; \quad f(x, y) = \left(\frac{1 - x^2}{y^2 - 1} \right)^{1/2}; \quad f(x, y, z) = \ln(xyz);$$

$$f(x, y) = \ln(x - y^2) - 2\sqrt{y - x^2}; \quad f(x, y) = x \ln(x + y) - y\sqrt{y - x}.$$

3. Soit f l'application définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

Déterminer le domaine de définition de f , puis montrer qu'on peut la prolonger en une application continue sur $\mathbf{R}^2$.

4. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}.$$

5. L'application $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

est-elle continue? Admet-elle des dérivées partielles en tout point? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

6. Montrer que la fonction $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie de la manière suivante n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$:

$$f(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

7. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| (1) $f: (x, y) \mapsto 2(x^2 + y^2) - 2xy + 2x - 2y + 4$; | (4) $f: (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$; |
| (2) $f: (x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - x)(x^2 + y^2 - 2x)$; | (5) $f: (x, y) \mapsto \frac{x^3 - 3x}{1 + y^2}$; |
| (3) $f: (x, y) \mapsto x(\ln(x)^2 + y^2)$; | (6) $f: (x, y) \mapsto x^2 y^3 (1 + 3x + 2y)$. |

8. Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet des extrema sur D et les déterminer :

- (1) $f: (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$
- (2) $f: (x, y) \mapsto 2x^2 - 3y^2 - 1$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- (3) $f: (x, y) \mapsto 4x^2 + 2xy - 3y^2$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ et } -2 \leq y \leq 0\}$;
- (4) $f: (x, y) \mapsto x^2 - \exp(y^2)$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9. Soit $a \in \mathbf{R}$. On cherche toutes les fonctions $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a.$$

- (1) Soit $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$.
- (2) Intégrer la réponse de la question précédente pour en déduire l'expression de f .
- (3) En déduire les solutions de l'équation initiale.

10. Résoudre sur $\mathbf{R}^2$ les équations aux dérivées partielles suivantes à l'aide du changement de variable proposé :

- (1) $\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = x$ ($x = u, y = v + 2u$).
- (2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + 2xy + y^2$ ($u = x + y, v = 2x + y$).
- (3) $c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, où $c > 0$ ($u = x + ct, v = x - ct$).

11. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ à l'aide d'un passage en coordonnées polaires :

- (1) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$.
- (2) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = kf, k \in \mathbf{R}$.
- (3) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (4) $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$.

12. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'ouvert D en utilisant le changement de variables proposé :

- (1) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - 2f(x, y) + 2 = 0$, sur $D = \mathbf{R}_+^{*2}$ ($u = xy, v = \frac{x}{y}$).
- (2) $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$, sur $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y > 0\}$ ($u = x + y, v = xy$).
- (3) $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, sur $D = \mathbf{R}_+^{*2}$ ($x = \frac{u}{v}, y = uv$).

13. Pour chacune des courbes suivantes, déterminer les points réguliers puis une équation de la tangente en chacun de ces points. En quels points la tangente est-elle parallèle aux axes de coordonnées ?

- (1) $\mathcal{C}: x - y = 0$
- (2) $\mathcal{C}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$)
- (3) $\mathcal{C}: x^3 + y^3 = 3xy$.
- (4) $\mathcal{C}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$)
- (5) $\mathcal{C}: y^2 = 2px$ ($p > 0$)
- (6) $\mathcal{C}: x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$.