

1. Pour chacun des exemples suivants, déterminer la matrice représentative dans la base canonique de E de l'endomorphisme proposé.

- (1) $E = \mathbf{R}^2$, réflexion orthogonale par rapport à $F: x - 2y = 0$.
- (2) $E = \mathbf{R}^2$, rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- (3) $E = \mathbf{R}^3$, réflexion orthogonale par rapport à $F: -2y + z = 0$.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R}) \mid f = f''\}$.

- (1) Vérifier que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t) dt + f(0)g(0)$ définit un produit scalaire sur E .
- (2) Déterminer une base orthonormée de E .
- (3) L'application $d: f \mapsto f'$ est-elle une isométrie de E ?

3. Montrer qu'une isométrie diagonalisable est une symétrie.

4. Soit E un espace euclidien.

- (1) Soient $u, v \in E$, tels que $\|u\| = \|v\| = 1$. Montrer que $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux.
- (2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tous $u, v \in E$, si $\langle u, v \rangle = 0$, alors $\langle f(u), f(v) \rangle = 0$.
 - (a) Montrer que, pour tous $u, v \in E$ non nuls, $\frac{\|f(u)\|}{\|u\|} = \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}$.
 - (b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $g \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f = \lambda g$ (on dit que f est une *similitude*).

5. Déterminer une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale :

$$(1) \text{ si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad (2) \text{ si } A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Soit $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

- (1) Vérifier que M est une matrice orthogonale.
- (2) Sans calculer le polynôme caractéristique de M , justifier que M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres avec multiplicité.

7. Reconnaître l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}; \quad C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}; \quad E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

9. Soit E un espace euclidien de dimension n ; soient s une symétrie de E et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

- (1) Montrer que s est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.
- (2) Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si, pour tous $u, v \in E$, $\langle s(u), v \rangle = \langle u, s(v) \rangle$.
- (3) Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.