

1.

- (1) Déterminer deux réels  $\alpha, \beta$  tels que  $\frac{1}{n(n+4)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+4}$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .
- (2) En déduire la valeur de la somme  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+4)}$  pour tout  $N \in \mathbf{N}^*$ .
- (3) Montrer que la série  $\sum \frac{1}{n(n+4)}$  est convergente et calculer sa somme.

2. Soit  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue. On pose, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) \, dx.$$

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $S_n$  la  $n$ -ème somme partielle de la série de terme général  $u_n$ .

- (1) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , justifier l'existence de l'intégrale  $\int_0^1 x^n f(x) \, dx$ .
- (2) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :

$$S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} \, dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} f(x) \, dx.$$

- (3) Justifier que la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x}$  est bornée sur  $[0; 1]$ ; en déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} f(x) \, dx.$$

- (4) Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge et calculer sa somme.

3. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels qui converge vers 0. Soient  $a, b, c \in \mathbf{R}$  tels que  $a + b + c = 0$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$ . Montrer que  $\sum v_n$  est convergente et calculer sa somme.

4. Donner la nature des séries suivantes :

- |                                              |                                      |                                                                           |
|----------------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| (1) $\sum \frac{n+1}{n^3-7}$ ;               | (5) $\sum \frac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$ ; | (9) $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ ;                           |
| (2) $\sum \frac{n+1}{n^2-7}$ ;               | (6) $\sum \frac{1}{\ln(n^2+2)}$ ;    | (10) $\sum \left(\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ ;            |
| (3) $\sum \frac{n+1}{n-7}$ ;                 | (7) $\sum \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ ;   | (11) $\sum \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ ; |
| (4) $\sum \sin \left(\frac{1}{n^2}\right)$ ; | (8) $\sum \frac{n^{999}}{2^n}$ ;     |                                                                           |

5. Déterminer en fonction de la valeur de  $\alpha \in \mathbf{R}$  la nature de la série :

$$\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}.$$

6. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un équivalent (pour  $n \rightarrow +\infty$ ) du nombre :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

7. En écrivant le terme de gauche sous la forme d'une somme partielle de série et en comparant avec une intégrale, montrer l'équivalent (pour  $n \rightarrow +\infty$ ) :

$$\ln(n!) \sim n \ln(n)$$

8. On s'intéresse à la série :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta},$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ .

(1) Montrer que la série converge si  $\alpha > 1$  et diverge si  $\alpha < 1$ .

(2) Dans cette question, on suppose  $\alpha = 1$ .

(a) Montrer que la série est divergente si  $\beta \leq 0$ .

(b) Pour tout  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$ , on pose

$$T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

Montrer que la suite  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée si  $\beta > 1$  et tend vers l'infini si  $\beta \leq 1$ .

(c) Conclure.

9. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{lll} (1) \sum (-1)^n \frac{n^3}{n!}; & (3) \sum \sin\left(\frac{n+1}{n} \pi\right); & (5) \sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}; \\ (2) \sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}; & (4) \sum (-1)^n (\sqrt{1+n} - \sqrt{n}); & \end{array}$$

10. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

(1) Montrer que  $u_n \sim v_n$ .

(2) Montrer que  $\sum u_n$  converge, mais que  $\sum v_n$  diverge.

11. Pour quelles valeurs de  $a, b \in \mathbf{R}$  la série de terme général  $\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$  est-elle convergente ? Calculer alors la somme de la série.

12. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels positifs. On suppose la série  $\sum u_n$  convergente et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

(1) Montrer que la suite  $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante et convergente, puis donner sa limite.

(2) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n R_k = (n+1)R_n + \sum_{k=0}^n k u_k.$$

En déduire que si  $\sum R_n$  est convergente, alors  $\sum n u_n$  l'est également.

(3) Dans cette question, on suppose que  $\sum n u_n$  converge.

(a) Que vaut la limite en  $+\infty$  de  $(n+1)R_n$  ?

(b) En déduire que  $\sum R_n$  est une série convergente.