1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$; on suppose que M est antisymétrique.

(1) Soit $X \in \mathbf{R}^n$ tel que $MX = -X$. En calculant $(MX)^\mathsf{T}X$ de deux manières différentes, montrer que $X^\mathsf{T}X = 0$. En déduire que $X = 0$.

(2) En déduire que la matrice $I_n + M$ est inversible.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par $f(M) = A^\mathsf{T}M + MA$.

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) On note F l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n. Montrer que le sous-espace F est stable par f.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Existe-t-il deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

4. Soient $a, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que $AB - BA = B$.

(1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$.

(2) En déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(B_k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ définie par $\varphi(M) = AMA$. Calculer $\det \varphi$.

6. Soient $a, b, c \in \mathbf{C}$. Calculer les déterminants suivants :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}; \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}; \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad d_6 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$d_8 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; \quad d_9 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad d_{10} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$d_{11} = \begin{vmatrix} 10 & 5 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad d_{12} = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}; \quad d_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $a, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. Calculer les déterminants suivants, de taille n :

$$d_{14} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}; \quad d_{15} = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$d_{16} = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}.$$

Solutions 6. et 7. $d_1 = 116$; $d_2 = -18$; $d_3 = 6$; $d_4 = 14$; $d_5 = 96$; $d_6 = -1$; $d_7 = -12$; $d_8 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$; $d_9 = -1$; $d_{10} = -16$; $d_{11} = 7\,700$; $d_{12} = b^2c^2 - 4a^2bc$; $d_{13} = 4a^3 + 27b^2$; $d_{14} = (-1)^{n+1}a_1(a_2 - a_1)^{n-1}$; $d_{15} = 1 + (-1)^{n+1}$; $d_{16} = (na + b)b^{n-1}$.

8. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on considère :

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}.$$

Déterminer les racines de P (on pourra commencer par simplifier le déterminant par des opérations sur les lignes).

9. Soient X et Y deux variables aléatoires binomiales indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,q)$ ($m, n \in \mathbf{N}^*$, $p, q \in]0;1[$). On considère la matrice aléatoire :

$$A = \begin{pmatrix} X & X+Y-1 \\ 0 & Y-1 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer la probabilité que A soit inversible.

(2) Donner la loi de la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.

10. On s'intéresse à l'équation matricielle $A^2 = -I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(1) Trouver une solution dans le cas où $n = 2$.

(2) Montrer l'équation ne possède pas de solutions si n est impair.

(3) Trouver une solution pour tout $n = 2p$ pair.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique. Soit $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = \det(A + xJ)$.

(1) Montrer que f est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.

(2) Montrer que la fonction f est paire.

(3) En déduire que $\det(A + xJ) = \det A$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

12. Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbf{R}$; on considère :

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{vmatrix}$$

(1) Montrer que $D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1 D_{n-1}(s_2 - s_1, \dots, s_n - s_1)$.

(2) En déduire que :

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1 \prod_{k=1}^{n-1} (s_{k+1} - s_k).$$

13. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle n-ème *polynôme de Tchebychev*, noté T_n, le polynôme défini par :

$$T_n(X) = \begin{vmatrix} 2X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2X & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2X & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & X \end{vmatrix}$$

(1) Calculer T_1, T_2 et T_3.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

14. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $M^\mathsf{T} M$.

(2) En déduire la valeur du déterminant de M.