

1. À l'aide des sommes de Riemann de $f: x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0; 1]$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \tan x, \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[; \quad x \mapsto e^x \sin x, \text{ sur } \mathbf{R}; \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x}, \text{ sur } \mathbf{R}_+^*; \quad x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}, \text{ sur } \mathbf{R}.$$

3. Calculer les intégrales et primitives suivantes :

$$\int \ln t \, dt, \text{ sur } \mathbf{R}_+^*; \quad \int_0^{\pi/3} (\tan t)^2 \, dt; \quad \int_0^2 |t^2 - 3t + 2| \, dt; \quad \int_0^1 (1+t)\sqrt{t} \, dt.$$

$$\int_1^e t^2 \ln t \, dt; \quad \int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2 t} \, dt; \quad \int_0^1 t^3 e^{t^2} \, dt; \quad \int \arctan t \, dt, \text{ sur } \mathbf{R}.$$

4. Calculer les intégrales et primitives suivantes (on pourra utiliser le changement de variable proposé entre parenthèses) :

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+e^t} \quad (x = e^t); \quad \int \frac{dt}{t^2+4}, \text{ sur } \mathbf{R} \quad (t = 2x); \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^3 t \, dt \quad (x = \sin t);$$

$$\int \frac{\ln t}{t} \, dt, \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \quad (x = \ln t); \quad \int \cos(\sqrt{t}) \, dt, \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \quad (x = \sqrt{t}); \quad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t + \sin 2t} \quad (x = \cos t).$$

5. Calculer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2 + 4t + 5}$ sur $\mathbf{R}$. On pourra mettre le dénominateur sous forme canonique et poser un changement de variable bien choisi.

6. Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{\arctan x}{(x+1)^2}$ sur $\mathbf{R}$.

7. Justifier la convergence et calculer les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}; \quad \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \, dt; \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} \, dt; \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt; \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \, dt.$$

8. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} \, dt; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \, dt; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3\sqrt{t}} \, dt; \quad I_4 = \int_0^1 \frac{t^2+1}{t} \, dt;$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{e^t}{t} \, dt; \quad I_6 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos t}}{t} \, dt; \quad I_7 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}; \quad I_8 = \int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}; \quad I_9 = \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \, dt;$$

$$I_{10} = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right) \, dt; \quad I_{11} = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t \ln(2+t^2)} \, dt; \quad I_{12} = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} \, dt; \quad I_{13} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin(\frac{1}{t^2})}{\ln(1+t^2)} \, dt.$$

9. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \, dt$ converge et calculer sa valeur à l'aide du changement de variable $t = \tan \theta$.

10.

(1) Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{4t}{t^4 - 1} dt$ converge.

(2) Vérifier que, pour tout $t > 2$,

$$\frac{4t}{t^4 - 1} = \frac{-2t}{t^2 + 1} + \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{t + 1}.$$

(3) En déduire la valeur de l'intégrale.

11. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

12. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbf{R}$ pour que l'intégrale impropre ci-dessous soit convergente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$$

13.

(1) Pour tout $x > 0$, montrer que l'intégrale suivante est convergente :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(2) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(3) Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

14. Dire si les intégrales suivantes sont absolument convergentes :

$$\int_0^1 t \ln t dt; \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+x^2} dx; \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt;$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}(2+3\cos^9 x) dx; \quad \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt; \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

15. Discuter, suivant les valeurs du paramètres $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt; \quad \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx;$$

$$\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x \sqrt[3]{x^3 + \alpha x} \right) dx \quad (\alpha \in [-4 : +\infty[)$$

16. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbf{R}$. Montrer la convergence de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{F'(t)}{t} dt$. En déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

17. Soit $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

(1) On suppose que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $\ell = 0$. La condition $\ell = 0$ est-elle suffisante pour garantir la convergence de l'intégrale ?

(2) Donner un exemple de fonction f continue, positive et non bornée (en particulier, ne tendant pas vers une limite finie en $+\infty$) telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.