

1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ -ev E . Soit $v \in E \setminus \{0\}$. Montrer que v est un vecteur propre de f si et seulement si $D = \text{Vect}(v)$ est un sous-espace stable par f .

2. Dans chacun des cas suivants, déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer les éléments propres de l'endomorphisme u de l'espace E :

- (1) $E = \mathbf{R}_2[X]$, $u: P \mapsto P(1) + P(0)X + P(-1)X^2$.
- (2) $E = \mathbf{R}_2[X]$, $u: P \mapsto XP' + P$.
- (3) $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $u: M \mapsto \text{Tr}(M)I_n - M$.
- (4) $E = E = \mathbf{R}[X]$, $u: P \mapsto (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$.

4. Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, on considère $D: f \mapsto f'$. Justifier que D est un endomorphisme et déterminer son spectre.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{Tr}(A) + \det(A)$.

6. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables ; donner leur diagonalisation le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$ mais qu'elle est diagonalisable sur $\mathbf{C}$; écrire cette diagonalisation.

8. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres ; en déduire une matrice B telle que $B^3 = A$.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice possédant une unique valeur propre λ . On suppose que A est diagonalisable. Montrer que $A = \lambda I_n$.

10. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, de rang 1.

- (1) Montrer que $\text{Tr}(f) \in \text{Sp}(f)$.
- (2) En déduire que f est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.

11. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Vérifier que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.
- (2) Montrer que A n'est pas diagonalisable mais qu'elle est trigonalisable.
- (3) Déterminer une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

12. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A n'est pas diagonalisable et qu'elle est semblable à la matrice T .

13. Trigonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Déterminer les suites vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2; \\ \forall n \in \mathbf{N} \ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 0; \\ \forall n \in \mathbf{N} \ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$
- (3) $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbf{N} \ u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$

15. On considère le système de suites récurrentes

$$\begin{cases} p_n = q_{n-1} + r_{n-1} \\ q_n = p_{n-1} + r_{n-1} \\ r_n = p_{n-1} + q_{n-1} \end{cases}$$

avec les conditions initiales $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.

- (1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère le vecteur colonne :

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle qu'on ait $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

- (2) Diagonaliser A .
- (3) En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- (4) Donner l'expression de p_n , q_n et r_n en fonction de n .

16. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- (2) Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 4$, $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n \\ w_{n+1} = -4u_n + 4v_n + 3w_n \end{cases}$$

Déterminer l'expression de u_n , v_n et w_n en fonction de n .