

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que cette série est convergente pour $z = 5i$ et divergente pour $z = 3 + 4i$. Quel est son rayon de convergence ?

2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{aligned} S_1: \sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}; \quad S_2: \sum \frac{n!}{(2n)!} z^n; \quad S_3: \sum (\ln n) z^n; \quad S_4: \sum n^3 n! z^n \\ S_5: \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n; \quad S_6: \sum \frac{\ln n}{\ln(n+1)} z^n; \quad S_7: \sum (1+i)^n z^n; \quad S_8: \sum \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}; \\ S_9: \sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n; \quad S_{10}: \sum \frac{\ln n}{n^2} z^n; \quad S_{11}: \sum \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}. \end{aligned}$$

3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel $\ell \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$S_1: \sum a_n z^{3n}; \quad S_2: \sum a_n 3^n z^{2n}.$$

5. On considère la série entière $\sum \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) x^n$. Déterminer le rayon de convergence R de la série, puis étudier la convergence en $\pm R$.

6. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum n^{(-1)^n} x^n$. Étudier la convergence en $\pm R$.

7. Déterminer le rayon de convergence, puis exprimer à l'aide des fonctions usuelles la somme des séries entières suivantes :

$$\begin{aligned} \sum n^2 x^n; \quad \sum \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n}; \quad \sum \frac{n-1}{n} x^n; \quad \sum \frac{n+1}{n!} x^n; \\ \sum \frac{n+2}{n+1} x^n; \quad \sum \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n}; \quad \sum \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

8. Montrer la convergence et déterminer la somme des séries numériques suivantes :

$$\sum \frac{n+1}{2^n}; \quad \sum \frac{n^2}{2^n}; \quad \sum \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n}.$$

9. Développer en série entière les fonctions suivantes (préciser le rayon de convergence) :

$$\begin{aligned} f_1: x \mapsto \ln(1+x+x^2); \quad f_2: x \mapsto \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0); \quad f_3: x \mapsto \frac{e^x}{1-x}; \\ f_4: x \mapsto \frac{1}{(1-x)(2+x)}; \quad f_5: x \mapsto \arctan(x+1); \quad f_6: x \mapsto (4+x^2)^{-3/2}. \end{aligned}$$

10. Soit f la fonction définie sur $] -1; 1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- (1) Justifier que f est développable en série entière sur $] -1; 1[$.
- (2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
- (3) En déduire le développement en série entière de f .

11. Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes :

$$(E_1): xy'' + 2y' - xy = 0 \quad (E_2): x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0;$$

$$(E_3): \begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases} ; \quad (E_4): x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

12. Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(E): (2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0.$$

En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0; +\infty[$.

13. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$f_1: x \mapsto \begin{cases} \frac{\exp(x)-1-x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases} \quad f_2: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{si } 0 < |x| < \pi \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

14. On considère la fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}.$$

- (2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Quelle est la série de Taylor de f ?
 (3) En déduire que f n'est pas développable en série entière.

15. Déterminer une fonction f infiniment dérivable en 0 et telle que $f^{(n)}(0) = n^2 n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Peut-on toujours répondre à cet exercice si on demande $f^{(n)}(0) = a_n$, avec $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle arbitraire ?

16. Le but de cet exercice est de déterminer la somme de la série $\sum \frac{1}{(3n+2)27^n}$.

- (1) Justifier que cette série est convergente. On note A sa somme.

On définit la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$.

- (1) Calculer la dérivée de S . En déduire le rayon de convergence de S .
 (2) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbf{C} \setminus \{1; j; j^2\}$, on a :

$$\frac{x}{1-x^3} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{j^2}{x-j} + \frac{j}{x-j^2} \right).$$

- (3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

$$\frac{x}{1-x^3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1}.$$

- (4) En primitivant l'équation précédente, déterminer une formule pour $S(x)$. On pourra s'aider, pour une partie du calcul, du changement de variables $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
 (5) En déduire la valeur de A .