

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $M(-2; 4; 0)$ sur la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations cartésiennes :

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(3; 2)$, $B(-1; -2)$ et $\Omega(2; -1)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le cercle de centre Ω et de rayon 2.

3. Écrire sous forme algébrique le nombre $(1 - i\sqrt{3})^{2025}$.

4. Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes :

(1) $z^2 - (1 + i)z + 5i = 0$.

(2) $z^4 = -1$.

(3) $z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

5.

(1) Déterminer sous forme algébrique les racines carrées du nombre complexe $3 - 4i$.

(2) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $w^2 - iw - 1 + i = 0$.

(3) Rappeler quelles sont les racines cubiques de 1.

(4) Écrire $-1 + i$ sous forme exponentielle.

(5) Résoudre l'équation $z^3 = -1 + i$ (donner les solutions sous forme exponentielle).

(6) En déduire les solutions de l'équation $z^6 - iz^3 - 1 + i = 0$.

6. Soit $U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité. Soit $a \in \mathbf{C} \setminus U$. Montrer que l'application :

$$f_a: z \mapsto \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

définit une bijection de U dans lui-même. Donner l'expression de f_a^{-1} .

7. Soit $u \in \mathcal{L}_3(\mathbf{R})$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}).$$

On définit également $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $D = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

(1) Montrer que $\mathbf{R}^3 = H \oplus D$.

(2) Montrer que H et D sont stables par u .

(3) Écrire la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus.

8. Dans $E = \mathbf{R}_2[X]$, on note $\mathcal{B}$ la famille $(X^2 + 1, X + 1, 2X^2 - X)$.

(1) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

(2) Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ puis celle de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique.

(3) Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B}$.

(4) On considère l'endomorphisme φ de E défini pour tout $P \in E$ par $\varphi(P) = XP'$. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$.

9. Un insecte pond des œufs. Le nombre d'œufs pondus suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf, de manière indépendante des autres œufs, peut éclore avec probabilité $p \in]0; 1[$. On note X le nombre d'œufs pondus et Y le nombre d'œufs éclos.

- (1) Rappeler la loi de X , son espérance et sa variance.
- (2) Soient $k, n \in \mathbf{N}$. Donner la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(Y = n \mid X = k)$. On pourra distinguer les cas $k < n$ et $k \geq n$.
- (3) En déduire la loi de la variable aléatoire Y .

10. On note ϕ l'unique solution positive réelle de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

- (1) Vérifier que $\phi = \sqrt{1 + \phi}$.
- (2) Justifier que $1 < \phi < 2$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \sqrt{1}, \quad u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \quad u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}},$$

et plus généralement :

$$u_n = \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$$

avec n symboles « racine carrée ».

- (3) Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.
- (4) Montrer que, pour tout, $n \in \mathbf{N}^*$, $1 \leq u_n \leq \phi$.
- (5) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante.
- (6) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers ϕ .
- (7) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|$. En déduire que $|u_n - \phi| \leq 2^{-n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

11. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (1) $(x \ln x)y' - y = -\frac{1 + \ln x}{x}$ sur $]1; +\infty[$.
- (2) $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$ sur $] -\infty; 0[$.
- (3) $y' \cos^2 x - y = e^{\tan x}$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

12. Sur $I =]\sqrt{3}; +\infty[$, on s'intéresse à l'équation :

$$(E): (x^2 - 3)y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

- (1) Déterminer les solutions polynômiales de (E) (on pourra commencer par déterminer le degré d'une éventuelle telle solution).
- (2) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I .

13. Déterminer l'ensemble des solutions développables en série entière de l'équation :

$$(E): x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

Cette équation admet-elle des solutions non développables en série entière ?

14. Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

- (1) Soit f une solution à valeurs complexes de (E_1) . On pose $g = f + f' + f''$. Déterminer une équation différentielle (E_2) du premier ordre vérifiée par g .
- (2) Résoudre (E_2) .
- (3) Résoudre (E_1) .