

1. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}}.$$

- (1) Pour tout entier naturel n , étudier la convergence de I_n . Que vaut I_0 ?
- (2) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \frac{(2n-1)I_{n-1}}{2n}$.
- (3) En déduire une expression de I_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. Justifier la convergence puis calculer les intégrales suivantes :

- (1) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$.
- (2) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ (on pourra procéder par intégration par parties).
- (3) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ (on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin^2(u)$).
- (4) $\int_0^\pi \frac{dt}{2 + \cos t}$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$).

3. Montrer la convergence et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n \geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}.$$

On pourra déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout $n \geq 3$,

$$\frac{4n-3}{n(n^2-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}.$$

4. Déterminer la nature des séries suivantes :

- (1) $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
- (2) $\sum \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.
- (3) $\sum \frac{e^{in}}{n^2 + i}$.
- (4) $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$.

5. On considère la fonction $\zeta: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- (1) Donner le domaine de définition de ζ .
- (2) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que, pour tous $m > n \in \mathbf{N}$ et $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{(m+1)^{x-1}} \right) \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{m^x} \right).$$

- (3) Montrer que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ lorsque $x \rightarrow 1$.
- (4) Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1)$.

6. On considère 4 pages Web reliées par des liens hypertexte :

- La page A contient un lien vers B , un lien vers C et un lien vers D .
- La page B contient un lien vers A et un lien vers C .
- La page C contient un lien vers D .
- La page D contient un lien vers A et un lien vers C .

Une personne navigue sur ce mini-Internet ; elle démarre sur la page A puis, pour chaque page consultée, clique au hasard (de manière équiprobable) sur l'un des liens qu'elle contient.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons A_n l'événement « la n -ème page visitée est A » et notons a_n sa probabilité (et de même, B_n, b_n , etc.)

- (1) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une relation entre a_{n+1}, a_n, b_n, c_n et d_n .
- (2) Déterminer des formules analogues pour b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1} .
- (3) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $X_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)^T \in \mathbf{R}^4$. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $X_{n+1} = MX_n$.
- (4) Justifier, sans faire aucun calcul, que M n'est pas inversible. Que peut-on en déduire concernant le spectre de M ?
- (5) Calculer la somme des lignes de M ; en déduire que 1 est une valeur propre de M^T et donner un vecteur propre correspondant. Que peut-on en déduire concernant le spectre de M ?
- (6) Déterminer le spectre de M et justifier qu'elle est diagonalisable.
- (7) Expliquer comment utiliser la diagonalisabilité de M pour calculer les valeurs de a_n, b_n, c_n et d_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On ne demande pas de réaliser les calculs.

La valeur des limites de a_n, b_n, c_n et d_n est l'un des éléments sur lesquels s'appuie l'algorithme PageRank utilisé par Google pour classer les résultats des requêtes adressées à son moteur de recherche.

7. Tracer les courbes paramétrées :

$$(1) \begin{cases} x(t) = 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x(t) = \cos(t) + \ln(|\tan(\frac{t}{2})|) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

8. Soit Γ la courbe de l'espace paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}$$

- (1) Déterminer un paramétrage de la tangente à Γ au point $M(t)$ de paramètre t .
- (2) Déterminer l'ensemble des paramètres t tels que la famille $(\overline{OM}'(t), \overline{OM}''(t))$ soit libre (de tels points sont dits *biréguliers*).
- (3) En tout point birégulier $M(t)$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par $M(t)$ et dirigé par les vecteurs $\overline{OM}'(t)$ et $\overline{OM}''(t)$ (appelé *plan osculateur* de la courbe).

9. On considère la surface $\mathcal{S}: x^2 + y^2 = z$. Justifier que tous les points de $\mathcal{S}$ sont réguliers, puis déterminer l'ensemble des plans tangents à $\mathcal{S}$ contenant la droite $\mathcal{D}: \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$