

Samedi 31 janvier 2026 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

PROBLÈME I

On considère la courbe paramétrée \mathcal{C} d'équation :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos t} \\ y(t) = \tan t \end{cases}$$

- Q1.** Proposer un ensemble d'étude de la courbe paramétrée \mathcal{C} en justifiant votre démarche.
- Q2.** Dresser le tableau des variations conjointes de x et y sur l'ensemble $]0; \pi/2[$. On indiquera, en justifiant, les éventuelles tangentes parallèles aux axes.
- Q3.** Tracer sur votre copie dans un repère orthonormé d'unité 1 cm les droites d'équation $D: y = x$ et $D': y = -x$. On admet que ce sont les asymptotes à la courbe.
- Q4.** Montrer que D et D' sont orthogonales.
- Q5.** Tracer la courbe \mathcal{C} sur le graphique réalisé à la **Q3**.
- Q6.** Vérifier que la courbe \mathcal{C} vérifie l'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$.

(d'après CCINP 2022)

PROBLÈME II

Étant donné un réel μ , on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0 \quad (E_\mu)$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0; 1[$.

II.A. Résolution dans le cas où $\mu = 0$. Dans cette partie, on suppose $\mu = 0$. On cherche donc à résoudre sur $]0; 1[$ l'équation

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' = 0 \quad (E_0)$$

- Q1.** Soit $f: x \mapsto \arcsin(2x - 1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $]0; 1[$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0; 1[$, et que :

$$\forall x \in]0; 1[\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

- Q2.** Montrer que toute fonction constante sur $]0; 1[$ est solution de (E_0) .

- Q3.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$, $\frac{16x - 8}{16(x^2 - x)} = \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x - 1}$.

- Q4.** On pose $z = y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à :

$$z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x - 1} \right) z = 0. \quad (E^*)$$

- Q5.** Résoudre (E^*) sur $]0; 1[$.

- Q6.** En déduire les solutions de (E_0) sur $]0; 1[$.

II.B. Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$. On se place dans le cas où $\mu \neq 0$. Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall x \in]-R; R[\quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q7. Justifier que y est de classe \mathcal{C}^∞ sur un ensemble que vous préciserez.

Q8. Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1} \right) x^n = 0.$$

On suppose dorénavant que y est solution de (E_μ) .

Q9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$a_n = \frac{a_0}{4^n (2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)$$

Q10. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.

Q11. Si $a_0 \neq 0$ et s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mu = 16p^2$, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.

Q12. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p , préciser le rayon de convergence de y .

II.C. Étude d'une solution particulière. On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$. Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle $]-R; R[$ par la relation :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est définie par la formule de la question **Q9** et R est le rayon de convergence obtenu à la question **Q12**.

Q13. À partir de la relation de la question **Q9**, montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$a_n = \frac{1}{4^n (2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1).$$

Q14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$(4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1).$$

Q15. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n} \times ((2n)!)^2 \times (4n-1)}.$$

Q16. En admettant la formule de Stirling : $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$, montrer que $a_n \sim \frac{-1}{4\sqrt{2\pi} n^{3/2}}$.

Q17. Rappeler le rayon de convergence de ϕ et préciser la convergence de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Q18. En déduire que l'équation (E_1) admet une solution non nulle f sur l'intervalle $]0; 1[$.
(d'après CCINP 2018)

PROBLÈME III

Présentation générale. L'objectif de ce problème est d'étudier l'existence de la borne inférieure suivante :

$$m = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1+x} dx, (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Plus précisément, nous allons montrer que cette borne inférieure existe et est atteinte en un unique couple (a, b) de \mathbf{R}^2 .

Dans la suite, $E = \mathbf{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbf{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à 1.

III.A. Étude d'une suite d'intégrales. On pose, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

Q1. Calculer I_0 .

Q2. Montrer que :

$$\forall n \geq 0, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Q3. En déduire les valeurs de I_1, I_2, I_3 et vérifier que :

$$I_4 = -\frac{7}{12} + \ln(2).$$

Q4. Montrer que $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

Q5. Montrer que $(I_n)_{n \geq 0}$ converge et que sa limite est 0.

Q6. Montrer que :

$$\forall n \geq 1, (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

Q7. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et donner sa somme.

Q8. En utilisant **Q2** et **Q4**, montrer que :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n},$$

et en déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

III.B. Étude d'un produit scalaire. On rappelle que $E = \mathbf{R}[X]$ et on pose :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x} dx.$$

Q9. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E . On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

Q10. Les vecteurs 1 et X sont-ils orthogonaux pour ce produit scalaire ?

Q11. On note $L(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbf{R}_1[X]$. Justifier l'existence de deux réels α et β tels que :

$$L(X^2) = \alpha X + \beta.$$

Q12. Que peut-on dire du polynôme $X^2 - L(X^2)$ par rapport à l'espace vectoriel $\mathbf{R}_1[X]$?
En déduire que (α, β) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} I_1\alpha + I_0\beta = I_2; \\ I_2\alpha + I_1\beta = I_3. \end{cases}$$

Q13. Justifier l'existence du réel m et l'égalité suivante :

$$m = \|X^2 - \alpha X - \beta\|^2.$$

On ne demande pas de simplifier cette expression.

(d'après CCINP 2024)

★ ★
★