

## PROBLÈME I

**Q1.** Gardons en tête que les fonctions  $x$  et  $y$  ne sont pas définies en  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ .

On peut remarquer que la fonction tangente est  $\pi$ -périodique alors que, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $x(t + \pi) = \cos(t + \pi) = -\cos t = -x(t)$ . On peut donc se restreindre à un intervalle de longueur  $\pi$ , disons  $]-\pi/2; \pi/2[$ , et compléter le tracé par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

De plus, la fonction tangente est impaire et la fonction cosinus paire; on a donc  $x(-t) = x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ ; on peut donc se restreindre davantage, à  $[0; \pi/2[$  et compléter le tracé par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

**Q2.** Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables sur l'intervalle  $[0; \pi/2[$ . On a, pour tout  $x \in [0; \pi/2[$ ,

$$x'(x) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \geq 0, \text{ avec égalité ssi } x = 0$$

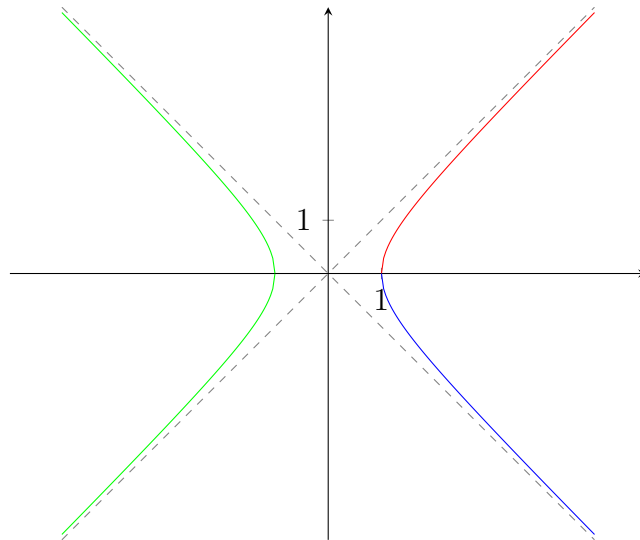
et

$$y'(t) = 1 + \tan^2 t > 0.$$

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont donc strictement croissantes sur  $[0; \pi/2[$ , et la courbe admet une tangente verticale au point de paramètre  $t = 0$  (car  $x'(0) = 0$  mais  $y'(0) \neq 0$ ), localisée en  $(x(0); y(0)) = (1; 0)$ .

Enfin,  $x$  et  $y$  tendent vers  $+\infty$  en  $\frac{\pi}{2}$ .

**Q3 et Q5.**



**Q3.**  $D$  admet comme équation cartésienne  $x - y = 0$ , elle admet donc comme vecteur normal  $(1; -1)$ . De même,  $D'$  admet comme vecteur normal  $(1; 1)$ . Ces deux vecteurs sont orthogonaux entre eux (leur produit scalaire est nul), ainsi les droites sont perpendiculaires.

**Q4.** Pour tout  $t \in \mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ , par définition de la tangente :

$$x(t)^2 - y(t)^2 = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = 1$$

Les points de  $\mathcal{C}$  vérifient donc l'équation  $x^2 - y^2 = 1$ .

## PROBLÈME II

II.A. Résolution dans le cas où  $\mu = 0$ .

**Q1.** La fonction arcsin est définie et continue sur  $[-1; 1]$  et dérivable sur  $] -1; 1[$ . Or, pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a  $2x - 1 \in [-1; 1]$ . La fonction  $f$  est donc bien définie sur  $[0; 1]$ . Elle est continue sur cet intervalle par composition; enfin, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $2x - 1 \in ] -1; 1[$ , donc  $f$  est dérivable sur  $]0; 1[$  par composition. Pour tout  $x \in ]0; 1[$ , on a donc

$$f'(x) = 2 \arcsin'(2x - 1) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2 + 4x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}.$$

**Q2.** Si  $g$  est constante sur  $]0; 1[$ , alors, pour tout  $x \in ]0; 1[$ , on a  $g''(x) = g'(x) = 0$ , donc  $16(x^2 - x)g''(x) + (16x - 8)g'(x) = 0$ ; autrement dit,  $g$  est solution de  $(E_0)$ .

**Q3.** Soit  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$ . On réduit le membre de droite au même dénominateur, puis on multiplie le numérateur et le dénominateur par 8 :

$$\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1+x}{x(x-1)} = \frac{2x-1}{2(x^2-x)} = \frac{16x-8}{16(x^2-x)}.$$

**Q4.** Si  $z = y'$ , alors  $y'' = z'$ . On se place sur l'intervalle  $]0; 1[$ , donc  $x^2 - x \neq 0$ , on a donc :

$$\begin{aligned} (E_0) &\iff 16(x^2 - x)z' + (16x - 8)z = 0 \iff z' + \frac{16x - 8}{16(x^2 - x)} = 0 \\ &\iff z' + \left( \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} \right) z = 0 \quad \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

**Q5.** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, les solutions sont donc les fonctions  $z \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ ; où  $\lambda$  parcourt  $\mathbf{R}$  et  $A$  désigne une primitive de  $\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}$  sur  $]0; 1[$ . La fonction  $A: x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x)$  convient. On a alors, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $e^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{2} \ln x} e^{-\frac{1}{2} \ln(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ . Les solutions de  $(E^*)$

sont donc les fonctions  $z: t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x(1-x)}}$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

**Q6.** D'après les questions **Q4** et **Q5**,  $y$  est solution de  $(E_0)$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $y'(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x(1-x)}}$ . Les solutions de  $(E_0)$  sont donc toutes les primitives des fonctions  $t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x(1-x)}}$ . D'après la question **Q1**, on en déduit que l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  est  $\mathcal{S} = \{y: x \mapsto \lambda \arcsin(2x - 1) + \mu \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$ .

II.B. Recherche d'une solution particulière dans le cas où  $\mu \neq 0$ .

**Q7.** La somme d'une série entière est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle ouvert de convergence :  $f$  est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R; R[$ .

**Q8.** Pour tout  $x \in ]-R; R[$ , on a  $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  et  $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ .

Alors  $y$  vérifie  $(E_\mu)$  si et seulement si

$$\begin{aligned} 16(x^2 - x) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (16x - 8) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \mu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\ \iff \sum_{n=2}^{+\infty} 16n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} 16n(n-1) a_n x^{n-1} \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} 16n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 8n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \mu a_n x^n = 0. \end{aligned}$$

On effectue un décalage d'indice dans toutes ces sommes ; on remarque qu'on peut faire démarrer toutes les sommes à l'indice  $n = 0$  car cela revient à faire apparaître des termes nuls dans les sommes démarrant à des indices supérieurs : ainsi  $y$  vérifie  $(E_\mu)$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( 16n(n-1) a_n - 16(n+1) n a_{n+1} + 16n a_n - 8(n+1) a_{n+1} - \mu a_n \right) x^n &= 0 \\ \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (16n^2 - \mu) a_n - (n+1)(16n+8) a_{n+1} \right) x^n &= 0 \\ \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1} \right) x^n &= 0. \end{aligned}$$

**Q9.** La fonction  $y$  étant solution de  $(E_\mu)$ , la condition établie à la question précédente est vraie. Par unicité de la décomposition en série entière de la fonction nulle, on a donc, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $(16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1} = 0$ , donc

$$a_{n+1} = \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} a_n. \quad (\star)$$

Montrons l'identité recherchée par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}^*$ .

Pour  $n = 1$ , en appliquant l'égalité  $(\star)$  à  $n = 0$ , on obtient,  $a_1 = a_0 \times \frac{-\mu}{8}$ , ce qui correspond bien à l'identité souhaitée.

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . On suppose la proposition vraie au rang  $n$ . D'après  $(\star)$ , on a donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} a_n \\ &= \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} \frac{a_0}{4^n (2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu) \quad (\text{HR}) \\ &= \frac{a_0}{4(2n+2)(2n+1)4^n (2n)!} \prod_{k=0}^n (16k^2 - \mu) \\ &= \frac{a_0}{4^{n+1} (2n+2)!} \prod_{k=0}^n (16k^2 - \mu). \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang  $n+1$  ; par principe de récurrence, l'égalité est donc vraie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**Q10.** Si  $a_0 = 0$ , alors d'après la question précédente, on a  $a_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , donc  $y$  est la fonction nulle, de rayon de convergence infini.

**Q11.** Si  $a_0 \neq 0$  et  $\mu = 16p^2$ , alors le produit  $\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)$  est nul si et seulement si  $p \leq n - 1$ , autrement dit si et seulement si  $n \geq p + 1$ . Ainsi, on a  $a_n = 0$  si et seulement si  $n \geq p + 1$ . On peut donc écrire  $y = \sum_{n=0}^p a_n x^n$ , il s'agit donc d'une fonction polynomiale de degré  $p$ .

**Q12.** Si  $a_0 \neq 0$  et  $\mu \neq 16p^2$  pour tout entier  $p$ , on peut utiliser le critère de d'Alembert car les coefficients  $a_n$  ne s'annulent pas : d'après ( $\star$ ), pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $x \in ]-R; R[$ ,

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|16n^2 - \mu|}{8(n+1)(2n+1)} |x| \sim \frac{16n^2}{16n^2} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

D'après le critère de d'Alembert,  $\sum a_n x^n$  converge absolument dès que  $|x| < 1$  et diverge grossièrement dès que  $|x| > 1$ . C'est donc une série entière de rayon 1.

### II.C. Étude d'une solution particulière.

**Q13.** Comme  $\mu = 1$  et  $a_0 = 1$ , la formule de la question **Q9** se réécrit :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = \frac{1}{4^n (2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - 1) = \frac{1}{4^n (2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (4k - 1)(4k + 1).$$

En effet, pour tout  $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ ,  $16k^2 - 1 = (4k)^2 - 1^2 = (4k - 1)(4k + 1)$ .

**Q14.** On écrit la factorielle de  $4n$  en regroupant les facteurs par « paquets » de 4 consécutifs :

$$\begin{aligned} (4k)! &= \prod_{k=0}^{n-1} (4k + 1)(4k + 2)(4k + 3)(4k + 4) \\ &= 2^n 4^n \prod_{k=0}^{n-1} (4k + 1)(2k + 1)(4k + 3)(k + 1) \\ &= 8^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (4k + 1)(4k + 3) \prod_{k=0}^{n-1} (2k + 1) = 8^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (4k + 1)(4k + 3) \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= 4^n (2n)! \prod_{k=0}^{n-1} (4k + 1) \prod_{k'=1}^n (4k' - 1) = 2^{2n} (2n)! \frac{4n - 1}{-1} \prod_{k=0}^{n-1} (4k + 1)(4k - 1) \\ &= -2^{2n} (2n)! (4n - 1) \prod_{k=0}^{n-1} (4k + 1)(4k - 1). \end{aligned}$$

**Q15.** On reprend la formule de la question **Q13** en y remplaçant le produit  $\prod (4k - 1)(4k + 1)$  grâce à la formule de la question précédente :

$$a_n = \frac{1}{4^n (2n)!} \times \frac{(4n)!}{-2^{2n} (2n)! (4n - 1)} = -\frac{(4n)!}{4^{2n} ((2n)!)^2 (4n - 1)}$$

**Q16.** On utilise la formule de Stirling pour donner des équivalents de  $(4n)!$  et  $(2n)!$  :

$$(4n)! \sim e^{-4n} 4^{4n} n^{4n} \sqrt{8\pi n} \quad \text{et} \quad (2n)! \sim e^{-2n} 2^{2n} n^{2n} \sqrt{4\pi n},$$

donc

$$a_n \sim -\frac{e^{-4n} 4^{4n} n^{4n} \sqrt{8\pi n}}{4^{2n} (e^{-2n} 2^{2n} n^{2n} \sqrt{4\pi n})^2 4n} \sim \frac{-1}{4\sqrt{2\pi n^{3/2}}}.$$

**Q17.** On rappelle que  $\phi$  est de rayon 1. D'après la question précédente,  $a_n = o(n^{-5/4})$ , or  $\sum n^{-5/4}$  est absolument convergente, donc  $\sum a_n$  est absolument convergente, donc convergente. Ceci montre que la série définissant  $\phi$  converge pour  $x = 1$ . Par ailleurs, la série  $\sum (-1)^n a_n$  est aussi absolument convergente, donc convergente ; la série définissant  $\phi$  converge donc pour  $x = -1$ .

**Q18.** D'après les questions précédentes, la série entière  $\phi$  est convergente donc définie sur  $[-1; 1]$  et non nulle. De plus, son terme général vérifie la condition établie à la question **Q8**. La restriction  $f$  de  $\phi$  à l'intervalle  $]0; 1[$  est également non nulle et vérifie la même condition ; c'est donc une solution non nulle de  $(E_1)$  sur  $]0; 1[$ .

### PROBLÈME III

#### III.A. Étude d'une suite d'intégrales.

**Q1.** La fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  est continue sur  $[0; 1]$ . On a, par un simple calcul de primitive :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[ \ln(1+x) \right]_0^1 = \ln(2).$$

**Q2.** Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Les fonctions  $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$  et  $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{1+x}$  sont continues sur  $[0; 1]$ . Alors, par linéarité de l'intégrale :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

**Q3.** On applique récursivement la formule de la question précédente :

- $I_0 + I_1 = 1$  donc  $I_1 = 1 - I_0 = 1 - \ln 2$  ;
- $I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$  donc  $I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$  ;
- $I_2 + I_3 = \frac{1}{3}$  donc  $I_3 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{5}{6} - \ln 2$  ;
- $I_3 + I_4 = \frac{1}{4}$  donc  $I_4 = \frac{1}{4} - I_3 = -\frac{14}{24} + \ln 2 = -\frac{7}{12} + \ln 2$ .

**Q4.** Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $x^{n+1} \leq x^n$  donc  $\frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}$ . Par croissance de l'intégrale (car  $0 \leq 1$ ), on en déduit que  $I_{n+1} \leq I_n$ , ce qui prouve que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante.

**Q5.** La suite  $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante d'après la question précédente ; de plus, elle est positive – autrement dit minorée par 0 – par positivité de l'intégrale (on a  $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$  sur  $[0; 1]$  et  $0 \leq 1$ ). On en déduit qu'elle converge vers une limite  $\ell \geq 0$ .

Reprenons alors la formule de la question **Q2** et faisons tendre  $n$  vers  $+\infty$  : on a  $I_n \rightarrow \ell$ ,  $I_{n+1} \rightarrow \ell$  et  $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$  ; par unicité de la limite,  $\ell + \ell = 0$ , d'où  $\ell = 0$ .

**Q6.** Montrons-le par récurrence sur  $n \geq 1$ .

Pour  $n = 1$ , on a  $-I_n = -1 + \ln 2$  d'après **Q3** ; d'autre part,  $\ln(2) + \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^k}{k} = \ln 2 - 1$ . Il y a bien égalité.

Soit donc  $n \geq 1$ , supposons la propriété vraie au rang  $n$ . Toujours d'après **Q2** et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} I_{n+1} &= (-1)^{n+1} \left( -I_n + \frac{1}{n+1} \right) = (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout  $n \geq 1$  par principe de récurrence.

**Q7.** On peut utiliser la question précédente pour calculer les sommes partielles de la série. Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^n I_n - \ln 2.$$

Comme  $I_n$  tend vers 0 en  $+\infty$  (**Q5**), ces sommes partielles tendent vers  $-\ln 2 \in \mathbf{R}$  ; on en déduit que la série est convergente et que sa somme est égale à  $-\ln 2$ .

**Q8.** Soit  $n \geq 0$ . Par décroissance de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , on a :

$$I_{n+1} + I_{n+1} \leq I_n + I_{n+1} \leq I_n + I_n$$

soit

$$2I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2I_n. \quad (1)$$

Maintenant, si  $n \geq 1$ , on applique directement l'inégalité de droite de (1) pour en déduire  $I_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$ . De plus, on peut appliquer l'inégalité de gauche à  $n' = n - 1 \geq 0$  : on obtient  $2I_n \leq \frac{1}{n}$ , d'où le résultat.

Enfin, multiplions l'encadrement par  $2n$  ; on a donc, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{n}{n+1} \leq 2nI_n \leq 1.$$

Il est évident que les deux bornes de cet encadrement tendent vers 1 en  $+\infty$ . Par théorème d'encadrement, on en déduit que  $2nI_n \rightarrow 1$ , donc  $I_n \sim \frac{1}{2n}$ .

### III.B. Étude d'un produit scalaire.

**Q9.** Il s'agit de montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit une forme bilinéaire symétrique définie positive. En préliminaire, notons que les polynômes et  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  sont des fonctions continues sur  $[0; 1]$  donc l'intégrale définissant  $\langle P, Q \rangle$  est bien définie.

Il est clair que si  $P, Q \in E$ , alors

$$\langle Q, P \rangle = \int_0^1 \frac{Q(x)P(x)}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x} dx = \langle P, Q \rangle.$$

Soient maintenant  $P, Q, R \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + Q, R \rangle &= \int_0^1 \frac{(\lambda P(x) + Q(x))R(x)}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{\lambda P(x)R(x) + Q(x)R(x)}{1+x} dx \\ &= \lambda \int_0^1 \frac{P(x)R(x)}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{Q(x)R(x)}{1+x} dx = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle. \end{aligned}$$

Ceci établit la linéarité à gauche ; par symétrie (paragraphe précédent), on en déduit la linéarité à droite, donc la bilinéarité.

Soit  $P \in E$ . Alors

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)^2}{1+x} dx \geq 0$$

par positivité de l'intégrale, car l'intégrande est évidemment positif sur  $[0; 1]$  et les bornes de l'intégrale sont croissantes.

Enfin, soit  $P \in E$ , supposons que  $\langle P, P \rangle = 0$ . La fonction  $x \mapsto \frac{P(x)^2}{1+x}$  est continue et positive sur  $[0; 1]$ . De plus, les bornes de l'intégrale sont distinctes ( $0 \neq 1$ ). On en déduit que  $\frac{P(x)^2}{1+x} = 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$ , d'où  $P(x) = 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$ . Le polynôme  $P$  admet donc une infinité de racines, cela ne peut être que le polynôme nul :  $P = 0$ .

**Q10.** Il suffit de calculer le produit scalaire :

$$\langle 1, X \rangle = \int_0^1 \frac{1 \cdot x}{1+x} dx = I_1 = 1 - \ln 2 \neq 0,$$

les vecteurs ne sont donc pas orthogonaux.

**Q11.** Par définition, le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $\mathbf{R}_1[X]$  est un élément de  $\mathbf{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$  ; il existe donc  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  tels que  $L(X^2) = \alpha X + \beta$ .

**Q12.** S'agissant d'une projection *orthogonale* sur  $\mathbf{R}_1[X]$ , l'élément  $X^2 - L(X^2)$  appartient au sous-espace  $\mathbf{R}_1[X]^\perp$ . Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle X^2 - L(X^2), 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - L(X^2), X \rangle = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \langle X^2 - \alpha X - \beta, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - \alpha X - \beta, X \rangle = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \langle X^2, 1 \rangle = \alpha \langle X, 1 \rangle + \beta \langle 1, 1 \rangle \\ \langle X^2, X \rangle = \alpha \langle X, X \rangle + \beta \langle 1, X \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

Mais, avec les notations de la partie précédente, pour tous  $p, q \in \mathbf{N}$ , on a :

$$\langle X^p, X^q \rangle = \int_0^1 \frac{x^p \cdot x^q}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{p+q}}{1+x} dx = I_{p+q}.$$

En substituant dans le système ci-dessus, on en déduit :

$$\begin{cases} I_2 = \alpha I_1 + \beta I_0 \\ I_3 = \alpha I_2 + \beta I_1. \end{cases}$$

**Q13.** Le sous-espace  $\mathbf{R}_1[X]$  est de dimension finie. D'après le théorème de la projection,

$$\inf \{ \|X^2 - P\|, P \in \mathbf{R}_1[X] \} = \|X - L(X)\|.$$

Par croissance de la fonction carré sur  $\mathbf{R}_+$ , on en déduit que

$$\inf \{ \|X^2 - P\|^2, P \in \mathbf{R}_1[X] \} = \|X - L(X)\|^2.$$

En remplaçant les éléments  $P$  de  $\mathbf{R}_1[X]$  par leur écriture  $aX + b$ , on obtient que :

$$\|X^2 - P\|^2 = \langle X^2 - aX - b, X^2 - aX + b \rangle = \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1+x} dx.,$$

d'où le résultat.