**1.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que cette série est convergente pour $z = 5i$ et divergente pour $z = 3 + 4i$. Quel est son rayon de convergence ?

**2.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$S_1\colon \sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}; \qquad S_2\colon \sum \frac{n!}{(2n)!} z^n; \qquad S_3\colon \sum (\ln n) z^n; \qquad S_4\colon \sum n^3 n! z^n$$
$$S_5\colon \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n; \qquad S_6\colon \sum \frac{\ln n}{\ln(n+1)} z^n; \qquad S_7\colon \sum (1+i)^n z^n; \qquad S_8\colon \sum \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1};$$
$$S_9\colon \sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n; \qquad S_{10}\colon \sum \frac{\ln n}{n^2} z^n; \qquad S_{11}\colon \sum \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}.$$

**3.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel $\ell \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

**4.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$S_1\colon \sum a_n z^{3n}; \qquad S_2\colon \sum a_n 3^n z^{2n}.$$

**5.** On considère la série entière $\sum \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\, x^n$. Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série, puis étudier la convergence en $\pm R$.

**6.** Donner le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum n^{(-1)^n} x^n$. Étudier la convergence en $\pm R$.

**7.** Déterminer le rayon de convergence, puis exprimer à l'aide des fonctions usuelles la somme des séries entières suivantes :

$$\sum n^2 x^n; \qquad \sum \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n}; \qquad \sum \frac{n-1}{n} x^n; \qquad \sum \frac{n+1}{n!} x^n;$$
$$\sum \frac{n+2}{n+1} x^n; \qquad \sum \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n}; \qquad \sum \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n.$$

**8.** Montrer la convergence et déterminer la somme des séries numériques suivantes :

$$\sum \frac{n+1}{2^n}; \qquad \sum \frac{n^2}{2^n}; \qquad \sum \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n}.$$

**9.** Développer en série entière les fonctions suivantes (préciser le rayon de convergence) :

$$f_1\colon x \mapsto \ln(1+x+x^2); \quad f_2\colon x \mapsto \frac{1}{a-x}\ (a \neq 0); \qquad f_3\colon x \mapsto \frac{e^x}{1-x};$$
$$f_4\colon x \mapsto \frac{1}{(1-x)(2+x)}; \quad f_5\colon x \mapsto \arctan(x+1); \qquad f_6\colon x \mapsto (4+x^2)^{-3/2}.$$

**10.** Soit $f$ la fonction définie sur $]-1;1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(1) Justifier que $f$ est développable en série entière sur $]-1;1[$.

(2) Montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

(3) En déduire le développement en série entière de $f$.

**11.** Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\colon xy'' + 2y' - xy = 0 \qquad (E_2)\colon x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0;$$

$$(E_3)\colon \left\{ \begin{array}{l} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{array} \right. ; \qquad (E_4)\colon x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

**12.** Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(E)\colon (2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0.$$

En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $]0;+\infty[$ ·

**13.** Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ :

$$f_1\colon x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon}; \end{array} \right. \qquad f_2\colon x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \text{ si } 0 < |x| < \pi \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{array} \right.$$

**14.** On considère la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

(1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme $P_n$ tel que, pour tout $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}.$$

(2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Quelle est la série de Taylor de $f$ ?

(3) En déduire que $f$ n'est pas développable en série entière.

**15.** Le but de cet exercice est de déterminer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{(3n+2)\,27^n}$.

(1) Justifier que cette série est convergente. On note $A$ sa somme.

On définit la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$.

(1) Calculer la dérivée de $S$. En déduire le rayon de convergence de $S$.

(2) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbf{C} \setminus \{1; j; j^2\}$, on a :

$$\frac{x}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{j^2}{x-j} + \frac{j}{x-j^2}\right).$$

(3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

$$\frac{x}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}.$$

(4) En primitivant l'équation précédente, déterminer une formule pour $S(x)$. On pourra s'aider, pour une partie du calcul, du changement de variables $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

(5) En déduire la valeur de $A$.