

1. On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'avoir « pile » (P) est  $p \in ]0; 1[$  et la probabilité d'avoir « face » (F) est  $q = 1 - p$ .

- (1) Pour tout  $n \geq 2$ , on considère l'événement  $A_n$  : « la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers  $n - 1$  et  $n$  ». Calculer  $\mathbf{P}(A_n)$ .
- (2) On note  $A$  l'événement « la séquence PF apparaît au moins une fois ». Calculer  $\mathbf{P}(A)$ .

2. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois événements.

- (1) Montrer que  $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$ .

Dans toute la suite, on suppose que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont de même probabilité  $p$ . On suppose également que  $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0$ .

- (2) Montrer que  $\mathbf{P}(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \leq 3(1 - p)$ . En déduire que  $p \leq \frac{2}{3}$ .
- (3) On suppose dans cette question que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont indépendants deux à deux. Montrer que  $\mathbf{P}(A \cup B) = p(2 - p)$  et  $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = 3p(1 - p)$ ; en déduire que  $p \leq \frac{1}{2}$ .
- (4) On suppose que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont mutuellement indépendants. Calculer  $p$ .

3. On étudie la vente d'un produit sur internet sur trois sites  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On a constaté que :

- si un client fait un achat sur le site  $A$ , il choisit indifféremment  $A$ ,  $B$  ou  $C$  pour l'achat suivant ;
- si un client fait un achat sur le site  $B$ , il fait l'achat suivant sur le site  $B$  ;
- si un client fait un achat sur le site  $C$ , il choisit pour l'achat suivant le site  $A$  avec probabilité  $\frac{1}{12}$ , le site  $B$  avec probabilité  $\frac{7}{12}$  et le site  $C$  avec probabilité  $\frac{1}{3}$ .

Pour le premier achat, le client choisit de façon équiprobable l'un des trois sites.

Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  les événements « au  $n$ -ème achat, le client se fournit respectivement auprès de  $A$ ,  $B$  et  $C$  » et on désigne par  $p_n$ ,  $q_n$  et  $r_n$  les probabilités respectives de ces événements.

- (1) Donner les valeurs de  $p_1$ ,  $q_1$  et  $r_1$ .
- (2) Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , donner une relation entre  $p_n$ ,  $q_n$  et  $r_n$ .
- (3) Exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ ,  $q_n$  et  $r_n$ . Faire de même pour  $q_{n+1}$  et  $r_{n+1}$ .
- (4) Pour  $n > 1$ , exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $r_{n+1}$  et  $r_n$ .
- (5) Vérifier que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. En déduire l'expression de  $r_n$  en fonction de  $n$ , puis celles de  $p_n$  et  $q_n$ .
- (6) Étudier la convergence des trois suites  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ,  $(q_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ .

4. On tire à pile ou face avec une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention d'un « pile ». On note  $N$  le nombre de tirages effectués. On choisit alors de manière équiprobable un nombre entier entre 1 et  $N$ .

- (1) Déterminer la probabilité de tirer le numéro 1.
- (2) Sachant que le numéro tiré est le 1, calculer pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  la probabilité que la pièce ait été lancée  $n$  fois.

5. On considère des urnes numérotées par les entiers naturels (non nuls). Pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , la  $k$ -ème urne contient une boule noire et  $k$  boules jaunes. Un joueur tire successivement une boule dans l'urne n° 1, puis deux boules dans l'urne n° 2, trois boules dans l'urne n° 3, etc. On note  $T$  le numéro de l'urne où le joueur tire une boule noire pour la première fois.

- (1) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{P}(T > n) = \frac{1}{n+1}$ . En déduire que la probabilité que le joueur ne tire jamais une boule noire est nulle.
- (2) Déterminer la loi de  $T$  et en déduire son espérance.

6. Soit  $X$  une v. a. à valeurs dans  $\mathbf{N}$  et d'espérance finie. Montrer que  $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n)$ .

7. Soient  $C, \alpha > 0$ . On considère une variable aléatoire  $X$  d'univers-image  $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$  et de loi :

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{C}{k^\alpha}.$$

- (1) À quelles conditions sur  $\alpha$  et  $C$  cette formule détermine-t-elle bien la loi d'une variable aléatoire ?
- (2) À quelles conditions supplémentaires sur  $\alpha$  la variable  $X$  est-elle d'espérance finie ? la variable  $X^2$  est-elle d'espérance finie ?

8. Dans une urne contenant au départ une boule verte et une boule rouge, on effectue une suite de tirages d'une boule selon la procédure suivante :

- si une boule verte est tirée, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule rouge ;
- si une boule rouge est tirée, on arrête les tirages.

On note  $X$  le nombre de tirages effectués (convention :  $X = 0$  si on ne s'arrête jamais de tirer). Pour tout  $i \in \mathbf{N}^*$ , on définit les événements  $V_i$  et  $R_i$  : « la  $i$ -ème boule tirée est verte (resp. rouge) ».

- (1) Pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , exprimer l'événement  $(X = k)$  à l'aide des  $V_i$  et de  $R_k$ .
- (2) Que vaut  $\mathbf{P}_{V_1 \cap \dots \cap V_{k-1}}(V_k)$  ?
- (3) Déterminer la loi de  $X$ .
- (4) Calculer l'espérance de  $X$  et celle de  $\frac{1}{X}$ .

9. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur le même univers. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+^*$ . Déterminer la loi de probabilité de  $X + Y$ .

10. Sur une chaîne de montage, on considère qu'en moyenne 5 produits sur 1 000 sont défectueux. On prélève 80 produits en sortie de chaîne et on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de produits défectueux.

- (1) Donner la loi de la variable  $X$ , puis en proposer une approximation.
- (2) À l'aide de cette approximation, donner la probabilité que :
  - (a) aucun produit ne soit défectueux ;
  - (b) deux produits soient défectueux ;
  - (c) au moins deux produits soient défectueux ;
  - (d) au plus cinq produits soient défectueux.

11. Un voyageur dispose de 100 places dans un avion. Sachant qu'en moyenne 3% des voyageurs ne se présentent pas à l'embarquement, il décide d'enregistrer 103 réservations. Quelle est la probabilité d'être en surbooking ?

12. Le nombre de fois où un individu attrape un rhume en une année donnée est une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $\lambda = 5$ . Un nouveau médicament vient d'être mis à disposition sur le marché. Ce médicament est efficace sur 75% de la population, pour qui le paramètre de la loi de Poisson est réduit à  $\lambda = 3$ . Sur le reste de la population, le médicament n'a pas d'effet.

Un individu essaie le médicament pendant un an et attrape deux rhumes. Quelle est la probabilité que le médicament ait été efficace sur lui ?

13. On effectue des répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0; 1[$ . On note respectivement  $X_1$  et  $X_2$  les variables aléatoires égales au rang du premier et du deuxième succès à cette expérience.

- (1) Rappeler la loi de  $X_1$ , son espérance et sa variance.
- (2) Soient  $k, \ell \in \mathbf{N}^*$ . Calculer la probabilité conditionnelle  $\mathbf{P}(X_2 = \ell \mid X_1 = k)$ . On pourra distinguer suivant les valeurs relatives de  $k$  et  $\ell$ .
- (3) Donner la loi de  $X_2$  et son espérance.