1. Que dire des coefficients de Fourier d'une fonction pouvant s'écrire comme combinaison linéaire (finie) de fonctions de la forme $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$? Application : déterminer la série de Fourier de la fonction (2π-périodique) $\sin^3$.

2. Soit f la fonction paire et 2π-périodique telle que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0;\pi]$.

(1) Représenter graphiquement la fonction f.

(2) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(3) En déduire la somme des séries :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}; \qquad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

3. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0;\pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement la fonction f.

(2) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(3) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

(4) En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}; \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

4. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = (x-\pi)^2$ pour tout $x \in [0;2\pi[$.

(1) Représenter graphiquement la fonction f.

(2) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(3) En déduire les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = |\sin x|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(1) Vérifier que la fonction f est π-périodique. Tracer son allure.

(2) Justifier que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

(3) Calculer la série de Fourier de f.

(4) Déterminer la valeur de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

6.

(1) Soit f une fonction continue et T-périodique. On suppose que tous les coefficients de Fourier de f sont nuls. Que dire de f ?

(2) Soient f et g deux fonctions continues et T-périodiques. On suppose que les coefficients de Fourier de f et g sont égaux. Que peut-on en déduire ?

(3) Que dire si on ne suppose plus que les fonctions des questions (1) et (2) sont continues mais continues par morceaux ?

7. Soit g la fonction 2π-périodique définie par :

$$\forall\, x \in \,]-\pi;\pi] \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi^2}{4} & \text{si } |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction g.

(2) En déduire la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$

8. Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. On s'intéresse à la fonction f 2π-périodique telle que, pour tout $x \in [-\pi;\pi[$, $f(x) = \cos(\alpha x)$.

(1) Déterminer les coefficients de Fourier de f.

(2) Calculer la somme de la série de Fourier de f.

(3) En déduire la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

9. Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in \,]-\pi;\pi]$.

(1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(2) En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\pi \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - 1\right).$$

10. On fixe $\theta \in \,]0;\pi[$ et on considère l'application $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paire et 2π-périodique telle que, pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 0 & \text{si } x \in \,]\theta;\pi] \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement la restriction de f à $[-\pi;2\pi]$.

(2) Déterminer la série de Fourier de f.

(3) Étudier la convergence de cette série.

(4) En déduire, pour tout $\theta \in \,]0;\pi[$, la valeur des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^2}.$$

11.

(1) On considère la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = |\sin(\pi x)|$. Déterminer la série de Fourier de f et la somme de cette série.

(2) Soient $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(2\pi n t)$ sous la forme d'un polynôme en $\sin(\pi t)$.

(3) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que, pour tout $x \in [-1;1]$, $\big||x| - P(x)\big| \leq \varepsilon$.

Dans cet exercice, on a montré un cas particulier du théorème de Weierstrass *qui affirme que, pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a;b]$.*

12. Soit f une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.

(2) En déduire que :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$