1. Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$ muni du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère l'endomorphisme ϕ de E défini par $\phi(P)(X) = P(-X)$. Montrer que ϕ est une symétrie orthogonale ; en déduire que c'est une isométrie.

2. Pour chacun des exemples suivants, déterminer la matrice représentative dans la base canonique de E de l'endomorphisme proposé.

(1) $E = \mathbf{R}^2$, réflexion orthogonale par rapport à $F\colon x - 2y = 0$.

(2) $E = \mathbf{R}^2$, rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

(3) $E = \mathbf{R}^3$, réflexion orthogonale par rapport à $F\colon -2y + z = 0$.

3. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbf{R}) \mid f = f''\}$.

(1) Pour tous $f, g \in E$, on définit :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + f(0)g(0)$$

Vérifier que cela munit E d'une structure d'espace euclidien.

(2) Déterminer une base orthonormée de E.

(3) L'application $d\colon f \mapsto f'$ est-elle une isométrie de E ?

4. Montrer qu'une isométrie diagonalisable est une symétrie orthogonale.

5. Soient u et v deux isométries d'un espace euclidien E.

(1) Soit $x \in E$, on suppose que $u(x) \neq v(x)$. Montrer que $\langle u(x), v(x)\rangle < \|u(x)\| \cdot \|v(x)\|$.

(2) On suppose qu'il existe $\lambda \in \,]0;1[$ tel que $\lambda u + (1-\lambda)v$ soit une isométrie. Montrer que nécessairement $u = v$.

6. Soit E un espace euclidien.

(1) Soient $u, v \in E$, tels que $\|u\| = \|v\| = 1$. Montrer que $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux.

(2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tous $u, v \in E$, si $\langle u, v\rangle = 0$, alors $\langle f(u), f(v)\rangle = 0$.

(a) Montrer que, pour tous $u, v \in E$ non nuls :

$$\frac{\|f(u)\|}{\|u\|} = \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}.$$

(b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $g \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f = \lambda g$ (on dit que f est une *similitude*).

7. Soit E un espace euclidien. Soit $f\colon E \to E$ une application *pas forcément linéaire* telle que :

$$\forall u, v \in E \quad \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

(1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée.

(2) En déduire que f est linéaire (et donc une isométrie).

8. Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$. On pose $S = a + b + c$, $\sigma = ab + bc + ac$, et :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que $M \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.

(2) Montrer que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.

9. Déterminer une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale :

$$(1) \text{ si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad (2) \text{ si } A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Soit $M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

(1) Vérifier que M est une matrice orthogonale.

(2) Sans calculer le polynôme caractéristique de M, justifier que M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres avec multiplicité.

11. Reconnaître l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

12. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}; \quad C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}; \quad E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

13. Soit E un espace euclidien de dimension n et s une symétrie de E.

(1) Montrer que s est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

(2) Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si, pour tous $u, v \in E$, $\langle s(u), v\rangle = \langle u, s(v)\rangle$.

(3) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

14. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E. On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

(1) Montrer que $\langle e_1, u(e_1)\rangle + \cdots + \langle e_n, u(e_n)\rangle = 0$.

(2) En déduire qu'il existe deux indices $i \neq j \in [\![1; n]\!]$ tels que $\langle e_i, u(e_i)\rangle$ et $\langle e_j, u(e_j)\rangle$ soient de signes différents.

(3) Pour tout $\theta \in [0; \pi/2]$, on pose $e(\theta) = (\cos\theta)e_i + (\sin\theta)e_j$. Montrer que la norme de $e(\theta)$ est constante égale à 1.

(4) Pour tout $\theta \in [0; \pi/2]$, on définit $g(\theta) = \langle e(\theta), u(e(\theta))\rangle$. Montrer qu'il existe $\theta_0 \in [0; \pi/2]$ tel que $g(\theta_0) = 0$.

(5) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans cette base a tous ses coefficients sur la diagonale nuls. On pourra procéder par récurrence sur $n = \dim E$.