1. Montrer que les applications suivantes sont bien définies et munissent les espaces E considérés d'une structure préhilbertienne :

(1) $E = \mathbf{R}^2$, $\langle (x,y),(x',y')\rangle = 2xx' + xy' + yx' + yy'$.

(2) $E = \mathbf{R}_n[X]$, $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

(3) $E = \mathbf{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(4) $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$, $\langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

(5) $E = \mathbf{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} P(t)Q(t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

(1) Soient $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Justifier que :

$$\mathrm{Tr}(A^\top B) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

(2) En déduire que l'application $\varphi\colon A,B \mapsto \mathrm{Tr}(A^\top B)$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ d'une structure d'espace euclidien.

(3) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\mathrm{Tr}\,A \le \sqrt{n\,\mathrm{Tr}(A^\top A)}.$$

Dans quels cas a-t-on égalité ?

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \le \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

4. Montrer que, pour tous $x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{R}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

et préciser le cas d'égalité.

5. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ et telle que $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le \frac{1}{3}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

et préciser le cas d'égalité.

6. Soit E un espace euclidien.

(1) Soit H un sous-espace vectoriel de E. Montrer que H est un hyperplan si et seulement s'il existe un vecteur $u \in E\setminus\{0\}$ tel que $H = x^\perp$.

(2) En déduire que pour tout forme linéaire f sur E, il existe un unique vecteur $u \in E\setminus\{0\}$ telle que, pour tout $v \in E$, $f(v) = \langle u,v\rangle$.

7. Orthonormaliser les familles suivantes par l'algorithme de Gram-Schmidt :

(1) $((1,0,1),(1,1,1),(-1,1,0))$ pour le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^3$;

(2) $(1,X,X^2)$ dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni de $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{2} P^{(k)}(k+1)Q^{(k)}(k+1)$.

(3) $(1,X,X^2)$ dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni de $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$;

(4) $\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire de l'exercice 2.

8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour $X, Y \in \mathbf{R}^3$, on pose $\langle X, Y\rangle = X^\mathsf{T} AY$.

(1) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

(2) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Donner une base des espaces $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)^\perp$ et $\mathrm{Vect}(e_2)^\perp$

9. Dans $E = \mathcal{C}(0; 1], \mathbf{R})$ muni de son produit scalaire usuel, on considère $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. On pourra remarquer que, si $f \in E$, alors la fonction $g\colon t \mapsto tf(t)$ appartient à F.

10. On note $\ell^2(\mathbf{R})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $\sum u_n^2$ soit une série convergente.

(1) (a) Montrer que, si $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, alors $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$.

(b) En déduire que, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de $\ell^2(\mathbf{R})$, alors la série de terme général $u_n v_n$ est absolument convergente.

(c) Montrer que $\ell^2(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ des suites réelles.

(2) Si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de $\ell^2(\mathbf{R})$, on pose :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

Montrer que cela définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbf{R})$.

(3) Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on considère la suite $\mathcal{E}_p = (\delta_{p,n})_{n\in\mathbf{N}}$ dont tous les termes sont nuls sauf le p-ème, qui vaut 1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbf{N}^*$, la famille $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_P)$ est orthonormée.

(4) On note $F = \mathrm{Vect}((\mathcal{E}_p)_{p\in\mathbf{N}})$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \neq E$.

(5) Déterminer le sous-espace $F^\perp$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

11. Donner une base orthormée de $\mathbf{R}_2[X]$:

(1) muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.

(2) muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^\pi P(t)Q(t)\sin t \,\mathrm{d}t$.

12. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer une base orthonormée du plan $\mathcal{P}$ admettant pour vecteur normal $(1, 2, -1)$. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

13. Dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = (2, 4, 4)$ sur la droite vectorielle D engendrée par $v = (1, 1, 1)$. En déduire la distance entre u et D.

14. Dans l'espace euclidien canonique $\mathbf{R}^3$, on pose $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x + y\big\}$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F

15. Dans l'espace euclidien $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire usuel, on pose $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}(I_2, J)$.

16. On se place dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Donner le projeté orthogonal de la fonction $t \mapsto t^3$ sur le sous-espace vectoriel F de E constitué des fonctions affines définies sur $[0; 1]$.

(2) En déduire la valeur du réel :

$$d = \inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^1 (t^3 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$$