DEVOIR DE VACANCES

Facultatif, non noté, vivement conseillé.
À rendre le mardi 1er septembre.

1 Soit α un nombre réel strictement positif. Dans tout l'exercice, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie de la manière suivante :

$$u_0 = \frac{1+\alpha}{2} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{\alpha}{2u_n}.$$

1. Vérifier qu'on a bien $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq \sqrt{\alpha}$; *pour l'initialisation, on pourra utiliser le fait que* $\left(1-\sqrt{\alpha}\right)^2 \geq 0$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge vers un réel ℓ.
3. En remarquant que la sous-suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ doit elle aussi converger vers ℓ, montrer que $\ell = \sqrt{\alpha}$.
4. On considère la fonction $f : x \mapsto x/2 + \alpha/2x$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que $0 \leq f'(x) \leq 1/2$ pour tout $x \geq \sqrt{\alpha}$.
5. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq 1/2\,(u_n - \alpha)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
6. En déduire que $0 \leq u_n - \alpha \leq 2^{-n-1}(1+\alpha)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
7. Écrire en Python une fonction `racine(alpha, epsilon)` qui prend en entrée deux réels strictement positifs `alpha` et `epsilon`, et renvoie une approximation de la racine carrée de `alpha` avec une erreur inférieure ou égale à `epsilon`. Cette fonction ne doit pas faire appel à l'expression `alpha ** (1/2)` ni à la fonction `math.sqrt`.

2 On considère l'application :

$$u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
2. Écrire la matrice représentative de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Donner une base du noyau et une base de l'image de u.

On considère les ensembles :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x+y+z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

4. Montrer que H et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$, en donner une base puis les dimensions.
5. Montrer que $\mathbf{R}^3 = H \oplus D$.
6. En notant (v_1, v_2) et (v_3) les bases respectives de H et D trouvées précedemment, montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$; puis déterminer la matrice représentative de u dans la base (v_1, v_2, v_3).

Retrouvez ce sujet au format numérique sur `besson-math.fr`. Pour toute question, je suis joignable par courrier électronique à l'adresse `etienne.besson@ac-creteil.fr`.