

CORRIGÉ DU DEVOIR DE VACANCES

EXERCICE I

1. On peut procéder par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = (1 + \alpha)/2 > 0$ car $\alpha > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = u_n/2 + \alpha/2u_n$, avec $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence et $\alpha > 0$, donc $u_{n+1} > 0$, ce qui achève la démonstration.

2. On procède de nouveau par récurrence.

Pour $n = 0$, on utilise la remarque de l'énoncé : $(1 - \sqrt{\alpha})^2$ est le carré d'un réel donc positif, autrement dit $1 - 2\sqrt{\alpha} + \alpha \geq 0$, d'où $u_0 = (1 + \alpha)/2 \geq \sqrt{\alpha}$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq \sqrt{\alpha}$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{\alpha}{2u_n},$$

donc

$$u_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{u_n}{2} + \frac{\alpha}{2u_n} - \sqrt{\alpha} = \frac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{\alpha} + \alpha}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{\alpha})^2}{2u_n} \geq 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n \geq \sqrt{\alpha}$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{\alpha}{2u_n} - u_n = \frac{\alpha - u_n^2}{2u_n} \leq 0 \quad \text{car } \alpha \leq u_n^2,$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

S'agissant d'une suite décroissante et minorée (par $\sqrt{\alpha}$), elle converge donc vers un réel ℓ .

3. La suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ , elle converge donc également vers ℓ . Mais par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{\alpha}{2u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{2} + \frac{\alpha}{2\ell}.$$

Par unicité de la limite, on a donc :

$$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{\alpha}{2\ell}, \quad \text{soit} \quad \ell^2 = \alpha,$$

d'où $\ell = \pm\sqrt{\alpha}$; mais la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à termes strictement positifs, sa limite ne peut être que positive ou nulle, et on a donc nécessairement $\ell = \sqrt{\alpha}$.

4. La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorème d'opérations. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2x^2}$. Et si $x \geq \sqrt{\alpha}$, alors :

$$0 \leq \frac{\alpha}{2x^2} \leq \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

donc

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{\alpha}{2x^2}}_{f'(x)} \leq \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue sur $[\sqrt{\alpha}; u_n]$, dérivable sur $] \sqrt{\alpha}; u_n[$ et, pour tout $x \in] \sqrt{\alpha}; u_n[$, on a $0 \leq f'(x) \leq 1/2$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc, pour tout $x \in [\sqrt{\alpha}; u_n]$:

$$0(x - \sqrt{\alpha}) \leq f(x) - f(\sqrt{\alpha}) \leq \frac{1}{2}(x - \sqrt{\alpha}).$$

En particulier, pour $x = u_n$:

$$0 \leq f(u_n) - f(\sqrt{\alpha}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{\alpha}),$$

et on obtient le résultat souhaité en remarquant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha}$.

6. Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n - \sqrt{\alpha} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} (u_0 - \sqrt{\alpha}) = 2^{-n}(u_0 - \sqrt{\alpha}),$$

avec

$$u_0 - \sqrt{\alpha} = \frac{1 + \alpha}{2} - u_0 \leq \frac{1 + \alpha}{2},$$

d'où

$$0 \leq u_n - \sqrt{\alpha} \leq 2^{-n-1}(1 + \alpha).$$

7. On a construit au cours du problème une suite qui converge vers $\sqrt{\alpha}$, et la question précédente nous permet de majorer la distance entre le terme général u_n et la valeur limite $\sqrt{\alpha}$. On va donc écrire une fonction calculant les termes successifs de la suite, et simultanément la valeur de $2^{-n-1}(1 + \alpha)$, en stoppant la boucle dès que cette dernière est inférieure à epsilon :

```
def racine(alpha, epsilon):
    u = (1 + alpha) / 2
    erreur = u
    while erreur >= epsilon:
        u = u / 2 + alpha / (2 * u)
        erreur = erreur / 2
    return u
```

EXERCICE 2

1. Premièrement, u est manifestement à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. D'autre part, vérifions la linéarité. Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} u \left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) &= u \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z' \\ \lambda y + y' \\ \lambda x + x' + \lambda z + z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \begin{pmatrix} x+y+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y'+z' \\ y' \\ x'+z' \end{pmatrix} \\
&= \lambda u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que u est linéaire, donc (puisque'elle est à valeurs dans le même espace que son espace de départ) un endomorphisme.

2. On rappelle que la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est constituée des trois vecteurs :

$$\mathcal{B} = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On calcule successivement :

$$u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3;$$

$$u(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3;$$

$$u(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3,$$

d'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Commençons par le noyau. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } u \iff u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x+z=0, \end{cases}$$

ainsi

$$\text{Ker } u = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y=0 \text{ et } x+z=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $((1, 0, -1))$ est une famille génératrice de $\text{Ker } u$; elle est évidemment libre car constituée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\text{Ker } u$.

Pour l'image, rappelons-nous que l'image d'une base : $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est nécessairement une famille génératrice de $\text{Im } u$. Ainsi :

$$\text{Im } u = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

en éliminant le troisième vecteur redondant (car identique au premier). La famille ainsi obtenue est une famille de deux vecteurs manifestement non colinéaires entre eux, elle est donc libre, et c'est donc une base de $\text{Im } u$.

4. L'ensemble D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant que sous-espace engendré par une famille de vecteurs (d'un seul vecteur en l'occurrence). Il possède $((1, 0, 1))$ comme famille génératrice, mais celle-ci est évidemment libre (car constituée d'un unique vecteur non nul), c'est donc une base de D , qui est donc de dimension 1.

Pour H , le plus simple est de l'exprimer directement sous la forme d'un sous-espace engendré :

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x - y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Une nouvelle fois, on a trouvé une famille génératrice de H constituée de deux vecteurs non colinéaires entre eux ; c'est donc une base de H , qui est donc de dimension 2.

5. Vérifions que H et D sont en somme directe par le critère de l'intersection. Soit $(x, y, z) \in H \cap D$. Alors :

- $(x, y, z) \in D$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = \lambda(1, 0, 1) = (\lambda, 0, \lambda)$;
- $(x, y, z) \in H$ donc $x + y + z = 0$, soit $\lambda + 0 + \lambda = 0$;

On en déduit que $\lambda = 0$, d'où $x = y = z = 0$. Ainsi, $H \cap D = \{0\}$, ce qui prouve que H et D sont en somme directe.

D'autre part, d'après la question précédente, $\dim H + \dim D = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$; ainsi $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.

6. Comme les sous-espaces H et D sont supplémentaires, la concaténation d'une base de H avec une base de D donne automatiquement une base de $\mathbb{R}^3$ (on pourrait aussi le redémontrer par le calcul).

Calculons l'image par u des vecteurs v_1, v_2 et v_3 :

$$\begin{aligned} u(v_1) &= u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 \quad \text{car } v_1 \in \text{Ker } u \text{ (question 3.)}; \\ u(v_2) &= u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3; \\ u(v_3) &= u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 2v_3. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{Mat}_{(v_1, v_2, v_3)} u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$