

Sujet CCINP

Samedi 21 mars 2026 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

EXERCICE. AUTOUR DE LA SÉRIE HARMONIQUE

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. Le but est de démontrer que celle-ci est une série divergente. On donne ensuite une application probabiliste des résultats obtenus.

On pose, pour tout $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Q1. Énoncer la définition de la convergence pour une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ de nombres réels ou complexes.

Q2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

Q3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Q4. En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1 \quad e^{H_n} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

puis, en remarquant l'égalité $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $e^{H_n} \geq n + 1$.

Q5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = +\infty$ et en déduire la divergence de la série harmonique.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient initialement une boule noire. On effectue n tirages dans l'urne de la manière suivante :

- au cours de chaque tirage, on tire une boule de l'urne, puis on la remet dans celle-ci en y ajoutant une boule blanche ;
- on considère les n tirages indépendants.

Pour tout entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire définie par :

- $X_k = 0$ si la boule tirée lors du k -ème tirage est blanche ;
- $X_k = 1$ si la boule tirée lors du k -ème tirage est noire.

On définit enfin la variable Z_n par $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Q6. Que représente la variable Z_n ?

Q7. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Reconnaître la loi de X_k et préciser son espérance.

Q8. Vérifier que l'espérance de Z_n est H_n .

Q9. En utilisant **Q4**, déterminer une valeur de n pour laquelle on peut espérer obtenir en moyenne au moins 4 fois la boule noire.

On pourra utiliser le fait suivant : $e^4 \in]54; 55[$.

PROBLÈME 1

On rappelle que pour tout x réel strictement positif et α réel, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

On considère la fonction $g: x \mapsto x^x$ et on pose $I =]0; +\infty[$ son ensemble de définition.

Partie I. Étude de la fonction g .

- Q10.** Calculer $g(1)$ et justifier que g est dérivable sur I .
- Q11.** Dresser le tableau de variations de g et préciser ses limites aux bornes de I .
- Q12.** Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g .
- Q13.** On admet que $g(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2)$. Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g .
- Q14.** Représenter sur l'intervalle $]0; 2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue dans la question précédente sur le même graphique.
On donne $e^{-1} \simeq 0,37$ et $g(e^{-1}) \simeq 0,69$.
- Q15.** En utilisant le graphique, justifier l'encadrement $e^{-1} < \int_0^1 x^x \, dx < 1$.

Partie II. Une approximation plus précise de $\int_0^1 x^x \, dx$.*II.1. Un calcul d'intégrales.*

- Q16.** Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\int_0^1 x^n \, dx$.
- Q17.** Soit $(n, k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$. Justifier que la fonction $x \mapsto x^n (\ln(x))^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.
- Dans la suite, on notera la fonction prolongée de la même façon.
- Q18.** Soit $(n, k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^k \, dx = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln(x))^{k-1} \, dx.$$

- Q19.** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, en déduire par récurrence sur k que, pour tout entier naturel k , on a :

$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^k \, dx = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

Justifier que cette égalité est encore vraie pour $(n, k) = (0, 0)$.

II.2. Expression de $\int_0^1 x^x \, dx$ à l'aide d'une série.

- Q20.** Rappeler le développement en série entière de $z \mapsto e^z$ ainsi que son rayon de convergence.
- Q21.** Justifier que $\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x \ln(x))^n}{n!} \, dx$.

Q22. En déduire l'égalité $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Q23. Soit $p \in \mathbf{N}$. On note $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ le reste au rang p de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \text{ et on admet l'inégalité } |R_p| \leq \frac{1}{(p+2)^{p+2}}.$$

Écrire en Python une fonction `approximation(e)` qui prend en paramètre un nombre réel strictement positif e et qui renvoie un nombre réel représentant l'approximation de $\int_0^1 x^x dx$ dont l'erreur maximale commise est e .

Donner ensuite une valeur approchée de $\int_0^1 x^x dx$ à $\frac{1}{27}$ près.

(d'après CCINP 2021)



PROBLÈME 2. ÉTUDE DE MATRICES TRIDIAGONALES PARTICULIÈRES

Présentation générale. Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés (diagonalisabilité, valeur du déterminant) de certaines matrices tridiagonales.

Plus précisément, pour un entier naturel $n \geq 2$, on considère $n - 1$ couples de nombres complexes (a_k, b_k) , pour k variant de 1 à $n - 1$, tels que $a_k b_k = -1$ et on s'intéressera alors à la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

On posera également $M_1 = (1)$ (matrice carrée d'ordre 1 dont le seul coefficient vaut 1).

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes. Elles peuvent être traitées séparément.

Notations.

- On note $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A et $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à un scalaire λ ;
- on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{C}$ (respectivement dans $\mathbf{R}$) ;
- on note $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$) l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbf{C}$ (respectivement dans $\mathbf{R}$) ;
- on note I_n la matrice identité d'ordre n ;
- on note $\bar{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z .

Partie I. Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$. Dans cette partie, on considère que n est égal à 3 et on pose $a_1 = a_2 = -1$ et $b_1 = b_2 = 1$. On s'intéresse donc à la matrice M_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ définie par :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Q24.** Justifier que M_3 vérifie bien les données de l'énoncé.
- Q25.** Déterminer le rang de $M_3 - I_3$ et en déduire que M_3 admet au moins une valeur propre réelle à préciser.
- Q26.** Déterminer $\chi_{M_3}(X)$. Ce polynôme est-il scindé dans $\mathbf{R}$?
- Q27.** Déduire de la question précédente la valeur du déterminant de M_3 .
- Q28.** Justifier que M_3 admet trois valeurs propres complexes distinctes, dont une seule est réelle et les deux autres conjuguées. En déduire que M_3 est diagonalisable dans $\mathbf{C}$ et donner, sans aucun calcul, la dimension de ses sous-espaces propres.

On note dans la suite λ l'unique valeur propre réelle de M_3 , et μ l'unique valeur propre complexe de M_3 dont la partie imaginaire est strictement positive. Ainsi, les valeurs propres de M_3 sont λ , μ et $\bar{\mu}$.

Q29. Déterminer une base du sous-espace propre $E_\lambda(M_3)$.

Q30. Déterminer les nombres complexes p tels que :

$$M_3 \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}.$$

En déduire une base du sous-espace propre $E_\mu(M_3)$.

Q31. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ une matrice à coefficients réels, $z \in \mathbf{C}$ et :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C}).$$

Montrer que si X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre z , alors le vecteur :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C}),$$

est un vecteur propre de N associé à la valeur propre $\bar{z}$.

En déduire une base de $E_{\bar{\mu}}(M_3)$.

Partie II. Cas général dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Uniquement dans cette partie, on considère que l'entier naturel n vaut 2. On s'intéresse donc à la matrice M_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ définie par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix},$$

où a_1 et b_1 sont deux nombres complexes tels que $a_1 b_1 = -1$.

Q32. Déterminer $\chi_{M_2}(X)$.

Q33. Si on considère a_1 et b_1 réels, la matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbf{R}$? Trigonalisable dans $\mathbf{R}$?

Q34. La matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbf{C}$?
Aucune diagonalisation effective n'est demandée.

Q35. Donner la valeur du déterminant de M_2 .

Objectif de la suite du problème.

Dans la **partie III**, nous démontrerons certains résultats liés à la suite de Fibonacci.

Dans la **partie IV**, nous déterminerons la valeur du déterminant des matrices tridiagonales vérifiant les conditions de l'énoncé.

Partie III. La suite de Fibonacci. On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Q36. Montrer que, pour tout entier naturel n , F_n est un entier naturel.

Q37. Résoudre l'équation caractéristique associée à $(F_n)_{n \geq 0}$. En déduire l'expression de F_n pour tout entier naturel n .

On considère la fonction récursive suivante, prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur de F_n :

```

1 def Fibo(n):
2     ''' n : entier naturel.
3     Renvoie la valeur de Fn'''
4     if n<=1:
5         return 1
6     return Fibo(n-1)+Fibo(n-2)

```

Q38. Les trois questions suivantes sont liées à la fonction **Fibo**.

- (a) À l'aide d'un schéma, représenter les différents appels récursifs lors de l'exécution de l'instruction **Fibo(4)**.
- (b) Expliquer, de manière simple et sans calcul, pourquoi cette fonction a une complexité de calcul élevée.
- (c) Écrire une fonction **FiboV2**, prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur du terme F_n . Cette fonction ne devra pas être récursive et devra avoir un coût de calcul moins élevé que **Fibo**.

Partie IV. Calcul du déterminant dans le cas général. On reprend les notations de la présentation générale et on considère donc les matrices M_n pour tout entier naturel $n \geq 1$. On note alors d_n le déterminant de M_n .

On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ est définie de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Q39. Donner les valeurs de d_1 et de d_2 puis calculer d_3 .

Q40. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$.

On pourra développer d_{n+2} par rapport à la dernière ligne de M_{n+2} .

Q41. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_n = F_n$.

(d'après CCINP 2024)

★ ★
★