

PROGRAMME DE COLLES 1

Semaine du 14 septembre.

CONNAISSANCES EXIGIBLES

Notion d'espace vectoriel, de sous-espace vectoriel. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, ce n'est pas le cas de l'union en général. Somme de deux sous-espaces, d'un nombre fini de sous-espaces. Notion de somme directe, caractérisation des sommes directes (deux caractérisations différentes suivant le nombre de sous-espaces). Couples de sous-espaces supplémentaires, projeté et symétrique d'un vecteur.

Combinaisons linéaires d'une famille (finie ou infinie) de vecteurs, sous-espace vectoriel engendré par une famille. Bases, familles libres, familles génératrices.

Applications linéaires, endomorphismes, formes linéaires. Noyau et image d'une application linéaire, critères d'injectivité et de surjectivité. Sous-espace stables par un endomorphisme et endomorphismes induits. Projections et symétries vectorielles, caractérisation (par la composition) et identification des éléments caractéristiques.

Dimension d'un espace vectoriel. Dimension d'un sous-espace, cas d'égalité. Formule de Grassmann et caractérisation des supplémentaires. Familles de vecteurs de cardinal respectivement inférieur, supérieur, égal à la dimension de l'espace. Théorème du rang, cas particulier des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Notion d'hyperplan, trois caractérisations des hyperplans (par la dimension, comme noyau d'une forme linéaire non nulle, comme supplémentaire d'une droite).

QUESTIONS DE COURS

- I. Soient $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3y \text{ et } z = 2x\}$. Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- II. Soit ϕ une application linéaire définie sur un espace vectoriel E et à valeurs dans un espace vectoriel F . Montrer que $\text{Ker } \phi$ est un sous-espace vectoriel de E , et que ϕ est injective si et seulement si $\text{Ker } \phi = \{0_E\}$.
- III. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $\phi : P \mapsto nXP - X^2P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, puis que le sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par ϕ .
- IV. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application $\phi : P = aX^2 + bX + c \mapsto aX^2 + a$. On admet que ϕ est un endomorphisme de E . Déterminer la nature géométrique de ϕ et donner ses éléments caractéristiques.

Prévisions pour la semaine prochaine : éléments de topologie et rappels d'analyse réelle.