

PROGRAMME DE COLLES 2

Semaine du 21 septembre.

CONNAISSANCES EXIGIBLES

Reprise du programme précédent : rappels et compléments d'algèbre linéaire

Éléments de topologie : norme et distance dans $\mathbb{R}^n$, boules fermées ; notion de point intérieur, de point adhérent à une partie de $\mathbb{R}^n$; parties ouvertes, parties fermées. Parties bornées de $\mathbb{R}^n$. *Aucune technicité n'est attendue sur ces points*

Limite en un point ou en l'infini d'une fonction d'une variable réelle. Fonctions continues, fonctions prolongeables par continuité. Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème des bornes atteintes/de Weierstrass.

Dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle, lien avec la tangente. Une fonction dérivable est continue, la réciproque est fautive en général. Théorème de Rolle, accroissements finis. Lien entre la monotonie et le signe de la dérivée ; en particulier : si une fonction dérivable admet un extremum sur un point *intérieur* de son domaine de définition, alors ce point est un zéro de la dérivée.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^k$. Formule de Taylor-Young ; unicité du développement limité.

QUESTIONS DE COURS

- I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $\phi : P \mapsto nXP - X^2P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, puis que le sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par ϕ .
- II. Soit $f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} \ln(1+x) \sin(x)$. Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$.
- III. Montrer que la fonction $x \rightarrow x^2 \sin(1/x)$ est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est dérivable mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- IV. Donner une expression, puis représenter graphiquement le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(x - y^2) - 2\sqrt{y - x^2}$. Dire (en justifiant très brièvement) si $\mathcal{D}_f$ est une partie ouverte, fermée, bornée de $\mathbb{R}^2$ et donner une expression de son intérieur.

Prévisions pour la semaine prochaine : fonctions de plusieurs variables réelles.