

PROGRAMME DE COLLES 3

Semaine du 28 septembre.

CONNAISSANCES EXIGIBLES

Reprise du programme précédent : analyse réelle

Limite ponctuelle d'une fonction de plusieurs variables. Passage en coordonnées polaires (dans le cas de deux variables). Continuité et prolongement par continuité. Théorème de Weierstrass / des bornes atteintes.

Dérivées partielles, gradient. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, formule de Taylor-Young au premier ordre. Dérivées partielles secondes, théorème de Schwarz.

Points critiques d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Les extrema d'une fonction $\mathcal{C}^1$ à l'intérieur de son domaine de définition sont des points critiques. Protocole pour la recherche du maximum et du minimum d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine de définition fermé et borné.

QUESTIONS DE COURS

- I. Montrer que l'équation $x^3 - x + 1 = 0$ admet une unique solution réelle et l'encadrer entre deux entiers consécutifs.
- II. Calculer les quatre dérivées partielles secondes de la fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 + 2y)e^{y-x}$; constater que le théorème de Schwarz est bien vérifié.
- III. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue et admet des dérivées partielles en tout point ; les calculer.

- IV. Après avoir justifié leur existence, déterminer le maximum et le minimum sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } 1 + x + y \leq 0\}$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$.

Prévisions pour la semaine prochaine : matrices.