

PROGRAMME DE COLLES 4

Semaine du 5 octobre.

CONNAISSANCES EXIGIBLES

Reprise du programme précédent : fonctions de plusieurs variables.

Représentation matricielle d'une application linéaire entre espaces de dimension finie, propriétés. Application linéaire canoniquement associée à une matrice ; noyau et image d'une matrice, théorème du rang. Matrices de passage, formule de changement de base. Forme « par blocs » de la matrice représentative d'un endomorphisme admettant un sous-espace stable dans une base adaptée.

Polynômes de matrices ; polynômes annulateurs d'une matrice. Inversibilité et calcul de l'inverse d'une matrice admettant un polynôme annulateur de coefficient constant non nul.

Trace d'une matrice carrée. La trace est une forme linéaire. Trace d'un produit ; deux matrices semblables sont de même trace ; trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Transposée d'une matrice. La transposition est une application linéaire. Transposée d'un produit, transposée d'une matrice inversible et de son inverse. Matrices symétriques et antisymétriques. Toute matrice carrée se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

QUESTIONS DE COURS

- I. Après avoir justifié leur existence, déterminer le maximum et le minimum sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto 2x^2 - 3y^2 - 1$.
- II. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = (1, X + 1, X^2 + X + 1)$, déterminer la matrice de l'endomorphisme $\phi : P \mapsto X^2 P(1) + P'$.
- III. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$; alors $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables sont de même trace.
- IV. Justifier que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prévisions pour la semaine prochaine : déterminant.