

PROGRAMME DE COLLES 5

Semaine du 12 octobre.

CONNAISSANCES EXIGIBLES

Représentation matricielle d'une application linéaire entre espaces de dimension finie, propriétés. Application linéaire canoniquement associée à une matrice ; noyau et image d'une matrice, théorème du rang. Matrices de passage, formule de changement de base. Forme « par blocs » de la matrice représentative d'un endomorphisme admettant un sous-espace stable dans une base adaptée.

Polynômes de matrices ; polynômes annulateurs d'une matrice. Inversibilité et calcul de l'inverse d'une matrice admettant un polynôme annulateur de coefficient constant non nul.

Trace d'une matrice carrée. La trace est une forme linéaire. Trace d'un produit ; deux matrices semblables sont de même trace ; trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Transposée d'une matrice. La transposition est une application linéaire. Transposée d'un produit, transposée d'une matrice inversible et de son inverse. Matrices symétriques et antisymétriques. Toute matrice carrée se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Déterminant d'une matrice carrée. Règles de calcul : opérations sur les lignes et les colonnes, développement par rapport à une ligne ou une colonne ; déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice 2×2 . Déterminant d'un produit ; deux matrices semblables ont le même déterminant, déterminant d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ; applications à la matrice représentative d'un endomorphisme, à la matrice de passage d'une base vers une famille de n vecteurs.

QUESTIONS DE COURS

- I. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = (1, X + 1, X^2 + X + 1)$, déterminer la matrice de l'endomorphisme $\phi : P \mapsto X^2 P(1) + P'$.
- II. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$; alors $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables sont de même trace.
- III. Justifier que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- IV. Soit M une matrice antisymétrique réelle d'ordre n . Montrer que, si $X \in \text{Ker}(M + I_n)$, alors $X = 0$ (on pourra calculer $(MX)^T X$ de deux manières différentes). En déduire que $M + I_n$ est inversible.

Prévisions pour la semaine prochaine : séries numériques.