PROGRAMME DE COLLES 6

Semaine du 9 novembre.

CONNAISSANCES EXIGIBLES

Vocabulaire des séries : terme général, sommes partielles, convergence, divergence, somme, restes. Le terme général d'une série convergente tend vers zéro, la réciproque est fausse en général ; notion de divergence grossière. Critère de convergence et somme d'une série géométrique.

Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Théorèmes de comparaison des séries à termes positifs (trois versions : $\leq$, $o(\cdot)$ et $\sim$). Règle de d'Alembert. Critère de convergence pour les séries de Riemann.

Convergence absolue d'une série à termes quelconques. La convergence absolue implique la convergence (et inégalité triangulaire sur la somme), la réciproque est fausse en général. Critère spécial des séries alternées.

Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice, spectre, sous-espaces propres. Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe. Les valeurs propres d'une matrice sont des racines de tout polynôme annulateur de cette matrice.

Polynôme caractéristique d'une matrice. Le polynôme caractéristique est unitaire, de degré égal à la taille de la matrice, et ses racines sont exactement les valeurs propres. Notion de multiplicité d'une valeur propre. La dimension d'un sous-espace propre ne peut pas dépasser la multiplicité de la valeur propre correspondabnce ; cas particulier des valeurs propres simples.

QUESTIONS DE COURS

I. Calculer les sommes partielles de la série de terme général $\ln\left(1 + 1/n\right)$ et donner sa nature. En déduire que la série harmonique est divergente.

II. Donner la nature des séries de terme général $\frac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$ et $1 - \cos\left(1/n\right)$.

III. Donner la nature des séries de terme général $\frac{\ln n}{n^2}$ et $\frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

IV. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Prévisions pour la semaine prochaine : diagonalisation, trigonalisation et applications.